Matheſis Geometria ſpecialis
292.

Math. P. 2

Abhandlung
von den
Tangenten, Quadraturen
und
Rectificationen der Kegelſchnitte,

nebſt einigen andern,
dieſe Linien betreffenden Aufgaben.

Leipzig,
bey Siegfried Lebrecht Cruſius, 1773.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem Magnifico,

Hochedelgebohrnen, Hochgelahrten Herrn,

HERRN

George Heinrich

Bortz,

d. Z. Rectori der Univerſität zu Leipzig, und der philoſophiſchen Facultät daſelbſt Decano; der mathematiſchen Wiſſenſchaften öffentlichen Lehrer und Profeſſori ordinario; des Frauen-Collegii Collegiaten und dermaligen Präpoſito; der Leipziger ökonomiſchen Societät Mitgliede.

Magnifice,

Hochedelgebohrner Herr,

Hochgeehrteſter Herr Rector,

Wenn es noch zweifelhaft ſeyn könnte, ob die erſten Eindrücke, die auf unſer Herz gemacht werden, die ſtärkſten und dauerhafteſten wären: ſo würde mich gewiß die Lebhaftigkeit derjenigen Empfindung davon überzeugen, mit welcher ich gegenwärtige Abhandlung **Ew. Magnificenz** zu übergeben die Ehre habe, da ich auf die angenehmſte Weiſe fühle, wie ſehr die Proben **Ihrer** beſondern Gütigkeit, ja ich kann ſagen, **Ihrer** vorzüglichen Liebe und Sorgfalt, mich **Ihnen** verbunden haben, mit welchen **Sie**, von meinem zarteſten Alter an, in welchem ich das Glück hatte **Sie** kennen zu lernen, mich beehret haben.

Gegenwärtige Abhandlung, die Arbeit und Beſchäftigung meiner Nebenſtunden, übergebe ich **Ew. Magnificenz** um ſo mehr mit Vergnügen, da ich **Ihnen** hierdurch einen Beweiß geben

kann, wie ich dieſelben zugebracht habe. Der getreue und ſorgfältige Unterricht, welchen ich, ſo verſchiedene Jahre hindurch, von Denenſelben genoſſen habe, erfüllt mich nicht allein mit der vorzüglichſten Achtung und Erkenntlichkeit, ſondern lehrt mich auch zu gleicher Zeit den Fleiß nachahmen, in welchem Ew. Magnificenz jederzeit das würdigſte Beyſpiel geben.

Ich habe zu den eifrigſten Wünſchen für Dero beſtändiges und dauerhaftes Wohlergehen, nichts weiter als die Bitte noch hinzuzuſetzen, daß Sie mir Ihre Liebe und Wohlgewogenheit erhalten und mich noch fernerhin damit beehren wollen. Der ich mit der vollkommenſten Hochachtung verharre

Ew. Magnificenz

Leipzig,
den 20. April
1773.

ergebenſtgehorſamſter,

Curt Friedrich von Schönberg.

Vorrede.

Vorrede.

Der Innhalt gegenwärtiger Abhandlung erſtreckt ſich, einige wenige Aufgaben ausgenommen, ganz allein auf die Kegelſchnitte, obgleich die darinn gebrauchte Methode, auf alle krumme Linien, algebraïſche und tranſcendentiſche, ſich anwenden läßt. Denn einmal ſind doch die Kegelſchnitte von allen bekannten Linien die nützlichſten und brauchbarſten, und überdieſes iſt es vortheilhaft, das Verfahren, deſſen man ſich, in verſchiedener Abſicht, bey den krummen Linien überhaupt, bedient, an den Kegelſchnitten, als den einfachſten Linien, zuerſt kennen zu lernen, zumal, da bey den Linien höherer Ordnungen, nicht ſo gar viele Unterſuchungen vorkommen, welche dieſe nicht mit jenen gemein haben, oder wo das Verfahren für dieſelben einige Abänderung leidet. Ich habe aber die hier gebrauchten Formeln, die, wie man aus der Vergleichung ſehen kann, mit den Differentialformeln, nach denen man die gegebene, differentiirte Gleichung, anordnet

und hernach integrirt, im Grunde einerley ſind, ſo einzurichten geſucht, daß der Nutzen, der, bey den hier vorkommenden Aufgaben, die Erfindung der Tangenten, und der damit verwandten Linien, verſchaft, ſichtbar in die Augen fällt, wobey ich zugleich gezeigt habe, wie man ſich dieſer Formeln, ohne die Regeln des Differentiiren vorauszuſetzen, bedienen müſſe. Hierdurch aber glaube ich denenjenigen einen angenehmen Dienſt zu erzeigen, denen Abſicht Zeit oder andere Umſtände nicht verſtatten, über die Gränzen der gemeinen Algebra hinauszugehen; ja ich darf hoffen, daß auch verſchiedene von denen, die ſich bey Auflöſung dieſer Aufgaben des höhern Calculi, aber, wie oft geſchieht, nicht mit der gehörigen Einſicht und gleichſam auf eine mechaniſche Art bedienen, wenn ſie die Entſtehung und Anwendung der hier gelehrten Formeln, nebſt denen, gehörigen Orts beygebrachten Erinnerungen, in Erwägung ziehen, deutlicher als vorher einſehen werden, wie und warum man das Geſuchte durch Integrirung des dafür erforderlichen Differentialausdrucks erhält. Hierbey muß ich jedoch, zu meiner Entſchuldigung, noch dieſe Erinnerung hinzuſetzen, daß ich dadurch keinesweges behaupte, als ob die Formeln, wie ſelbige hier nach den gewöhnlichen Differentialformeln ausgedruckt ſind, einen Vorzug vor den letztern hätten. Es iſt vielmehr gewiß, daß bey dieſen ſelbſt die Bezeichnung bequemer iſt, und daß ſich eine ähnliche Veränderung und Einrichtung bey denenjenigen Formeln, in welchen höhere Differentialen mit vorkommen, nicht immer mit eben der Leichtigkeit, wie bey den erſtern, anbringen läßt.

Vorrede.

Ich würde, wie ich anfänglich Willens war, die Erfindung der größten und kleinſten Ordinaten, inglei- chen des Halbmeſſers der Krümmungskreiſe (radii oſculi) für die Kegelſchnitte hier mit beygefügt, und durch Beyſpiele erläutert haben, wenn mich nicht die Bedenklichkeit zurückgehalten hätte, daß ich dadurch, wider meine Abſicht, die Gränzen dieſer Schrift zu ſehr erweitern möchte. Die hier und da vorkommenden Citata, beziehen ſich durchgängig auf die mathemati- ſchen Lehrbücher des Herrn Hofrath **Käſtners**, die in Jedermanns Händen ſind, oder es doch wenigſtens, ihrer innern Vortrefflichkeit und zweckmäßigen Voll- ſtändigkeit wegen, zu ſeyn verdienen. Verſchiedene Aufgaben und Exempel habe ich aus ſeiner Analyſi des Unendlichen entlehnt, und nach meiner Art vorgetra- gen; worüber man mir, wie ich glaube, keine Vor- würfe machen wird, ſo wie ich auch zuverſichtlich hoffe, daß man kleine Verſehen, die hier und da meiner Auf- merkſamkeit entgangen ſeyn könnten, mir nicht ſowohl zurechnen, als vielmehr meinen Jahren verzei- hen wird.

Innhalt.

Innhalt.

I. Von den Tangenten, Subtangenten, Normalen und Subnormalen der Kegelſchnitte §. 1

II. Von den Quadraturen der Kegelſchnitte und den natürlichen oder hyperboliſchen Logarithmen 60

III. Von der Rectification der Kegelſchnitte 154

IV. Von Cubirung der Körper, beſonders der runden, die durch Umdrehung einer krummen Linie um ihre Axe entſtehen 178

V. Von der Quadratur der krummen Seitenflächen, derer durch Umdrehung einer krummen Linie entſtandenen runden Körper 193

VI. Anhang einiger Aufgaben, die Kegelſchnitte betreffend 202

I. Von

I.

Von den

Tangenten, Subtangenten, Normalen und Subnormalen der Kegelſchnitte.

1. Erklärung.

Wenn (Fig. 1.) eine gerade Linie GH an einen Punct M eines Kegelſchnitts dergeſtalt antrifft, daß ihre Verlängerung von beyden Seiten des Punctes, die krumme Linie nicht ſchneidet, ſo heißt dieſe gerade Linie eine Tangente des Schnitts; der Punct, den ſie mit der krummen Linie gemein hat, ein Berührungspunct.

2. Anmerkung. Dieſe Erklärung der Tangente, deren Möglichkeit ſogleich gezeigt werden ſoll, iſt eben dieſelbe, die Euklides (3. B. 2. Erkl.) für den Cirkel gegeben hat; ſie gilt aber für alle Kegelſchnitte, oder Linien der zweyten Ordnung. Bey Linien der höhern Ordnungen hingegen kann es gar wohl geſchehen, daß die Verlängerung der Tangente an einem Puncte die krumme Linie irgendwo wieder ſchneidet, und alſo mehr als einen Punct mit ihr gemein hat. Ein Beyſpiel hiervon giebt GH (Fig. 2.).

3. Erkl. Ein Perpendikel MQ (Fig. 1.) auf der Tangente aus dem Berührungspuncte, wird die Normale genennt. Eine Ordinate MP aus eben den Berührungspuncte auf die Abſciſſenlinie AB gezogen, beſtimmt auf ihr die beyden Theile PT, PN, von welchen jener die Subtangente, dieſer die Subnormale genennt wird.

4. Anm. Die Benennung der Subtangente und Subnormale bleibt, die Ordinate PM mag rechtwinklicht oder ſchiefwinklicht auf AB fallen, d. i. ſie mag einer Axe, oder einem Durchmeſſer, oder irgend einer andern Abſciſſenlinie zugeordnet ſeyn. Doch werden hier durchgängig, wenn nichts weiter erinnert wird, ſich dieſe Linien auf die Hauptaxe des Schnitts, und folglich auf rechtwinklichte Coordinaten beziehen.

5. Aufgabe. 1. **Eine Tangente GH an einen gegebenen Punct M eines Kegelſchnitts geometriſch zu ziehen.**

Aufloͤſung für die Ellipſe und Hyperbel (Fig. 3. 4.) Aus dem Puncte M ziehe man nach den beyden Brennpuncten F, f, die Linien MF, Mf, und nehme auf der groͤßten derſelben, (hier Mf) die man in der Hyperbel nach K zu verlaͤngern muß, MK = MF, und ziehe FK, ſo iſt die Parallele GH durch den Punct M mit FK gezogen, die verlangte Tangente.

Beweiß I.) für die Ellipſe. Weil GH ∥ FK und MFK = MKF ſo iſt GMF = HMK. Geſetzt die Linie MH koͤnnte die Ellipſe noch irgendwo z. E. in L ſchneiden: ſo nehme man auf der nach I verlaͤngerten MF; IM = Mf alſo FI = MF + Mf = AB = a (Alg. 378.) und ziehe FL, Lf, IL. In den Triangeln fML, IML ſind alsdenn die Seiten fM, ML den Seiten IM, ML, und alſo, wegen der gleichen Winkel HMK, IMH zwiſchen dieſen Seiten, auch die dritte Seite Lf der dritten LI gleich. Nun iſt aber, nach der Annahme, der Punct L ſo wie M in der Ellipſe, alſo auch MF + Mf = FL + Lf d. i. FL + LI = FI, zwo Seiten des Triangels FIL ſo groß wie die dritte Seite; welches abſurd iſt.

II.) für die Hyperbel. Hier ſind, wie bey der Ellipſe GMF = HMK = GMf. Auf Mf nehme man MI = MF, ſo iſt fI = fM — MF = AB = a (Alg. 406.)

406.) Geſetzt MH könnte die Hyperbel noch irgendwo z. E. in L ſchneiden: ſo ziehe man LF, LI, Lf, ſo iſt LI = LF alſo Lf — LF = Lf — LI. Iſt nun, wie hier angenommen wird, der Punct L ſo wie M in der Hyperbel, ſo iſt Lf — LI = fI oder Lf = fI + LI: welches abſurd iſt.

Eben ſo kann man zeigen, daß auch die unterwärts, nach G zu, verlängerte MH, die Hyperbel und Ellipſe nicht ſchneiden kann. Alſo hat GH nur den einzigen Punct M mit dem Kegelſchnitte gemein, und iſt folglich eine Tangente (1.) an dieſem Puncte.

6. Zuſatz. 1. Weil in der Parabel (Fig. 1.) die Axe unbegränzt oder unendlich; (Alg. 355.) alſo auch der andere Brennpunct f, ſo wie der Mittelpunct, als unendlich entfernt von dem Brennpuncte F anzuſehen iſt: ſo muß man, um vorhergehende Auflöſung auf die Parabel anzuwenden, aus dem gegebenen Puncte M an den Brennpunct F eine gerade Linie MF, und eine andere mit der Axe AB parallel laufende Mf ziehen, die als ein Stück der Linie aus dem andern, unendlich entfernten, Brennpuncte f anzuſehen iſt. Nimmt man nun gleichfalls auf ihr MK = MF und zieht FK, ſo iſt die Parallele GH mit FK durch den Punct M, die verlangte geometriſche Tangente an den gegebenen Punct der Parabel.

7. Anm. Das Verfahren im vorhergehenden Zuſatze gründet ſich darauf, daß man die Parabel als eine Ellipſe anſieht, deren große Axe unendlich wäre. (Alg. 384.) Nun giebt es zwar eigentlich keine Ellipſe von einer ſolchen Axe, weil dieſe Linie eine in ſich ſelbſt zurücklaufende Linie iſt, und die Axe dadurch begränzt wird (Alg. 363. 364.) Da ſich aber erweiſen läßt (Alg. 383.) daß für einerley Scheitelpunct, Parameter und Abſciſſe der Parabel und Ellipſe, der Unterſchied ihrer Bogen immer geringer wird, je mehr man die Axe der Ellipſe vergrößert, dergeſtalt, daß er endlich kleiner

 als

als jede angebliche Größe werden kann: ſo bedient man ſich ſolcher uneigentlichen Ausdrücke und Vorſtellungen, wie in andern Fällen, alſo auch hier, die Schlüſſe dadurch zu verkürzen, und die Rechnung zu erleichtern; und man bedient ſich derſelben mit deſto größerer Zuverſicht, wenn man dasjenige zuvor reiflich überdacht und erwogen hat, was Herr Hofrath **Käſtner** davon, hier und da in ſeinen Schriften und Vorreden, beygebracht hat, wo er dasjenige, was vielen hierbey unbegreiflich zu ſeyn geſchienen hat, durch ſeine Erläuterungen entwickelt, und durch ſeinen Vortrag begreiflich gemacht hat.

8. Zuſatz. 2. Weil (Fig. 1. 3. 4.) in dem Triangel FMK die Seite MK = MF (5. 6.) ſo iſt der Winkel MFK = MKF, alſo auch wegen der Parallelen GH, FK die correſpondirenden Wechſelswinkel GMF, HMK, oder: die Winkel, welche die aus den Brennpuncten an den Berührungspunct gezogenen Linien MF, Mf mit der Tangente machen, einander gleich.

9. Zuſ. 3. Wenn man in der Ellipſe oder Parabel, MF oder Mf über die Tangente hinaus verlängert, ſo ſind, wegen der gleichen Winkel GMF, HMK (8) an oder unter der Tangente, und der neu entſtehenden gleichen Verticalwinkel: die Winkel unter der Tangente den correſpondirenden anliegenden über derſelben gleich. In der Hyperbel iſt dieſe Verlängerung nicht nöthig.

10. Zuſ. 4. Alſo wird der Winkel, den in der Ellipſe und Parabel die Verlängerung der aus dem einen Brennpuncte an den Berührungspunct mit der andern aus demſelben Berührungspuncte in den zweyten Brennpunct gezogenen Linie, oder, in der Hyperbel, die unverlängerten Linien FM, Mf bey M machen, durch die Tangente GH in zween gleiche Theile getheilt. Der Theilung dieſes Winkels

kels bedient man ſich insgemein zu Auflöſung der Aufgabe (5.)

11. Aufg. 2. Eine Normale MQ an einen gegebenen Punct M eines Kegelſchnitts geometriſch zu ziehen.

Aufl. Man ziehe den Winkel FMK; (5.) die Linie MQ die dieſen Winkel theilt, iſt die verlangte Normale.

Bew. Man ziehe eine Tangente GH an den Punct M (5) ſo iſt, FMQ = QMK; und GMF = HMK; alſo FMQ + GMF = QMK + HMK, oder MQ ein Perpendikel auf der Tangente aus dem Berührungspuncte, und folglich (3.) eine Normale an den gegebenen Punct.

12. Zuſ. 1. Wenn man alſo die Normale MQ zieht (11) und aus M ein Perpendikel MH auf dieſer Normale aufrichtet, ſo iſt dieſes Perpendikel zugleich eine Tangente an den gegebenen Punct; (3) auf welche Art die Aufgabe (5) gleichfalls gelößt werden kann.

13. Zuſ. 2. Wenn man HM nach G zu, bis an T verlängert, ſo iſt das Stück MT ein beſtimmter Theil der unbegränzten geometriſchen Tangente GH, welcher von der Abſciſſenaxe des Schnitts auf eben die Art, wie beym Cirkel in der Trigonometrie von der Secante, abgeſchnitten und begränzt wird. Eben ſo wird MN ein beſtimmter Theil der unbegränzten geometriſchen Normale MQ; und in dem Verſtande kann man die Größe einer ſolchen beſtimmten Tangente oder Normale, für jeden beliebigen Punct, ſo wie die Subtangente, Subnormale ꝛc. algebraiſch ausdrücken, wie in der Folge gezeigt werden wird.

14. Zuſ. 3. Da die Tangente des Schnitts mit der Linie FK jederzeit parallel läuft (5. 6.) ſo erſieht man hieraus ſogleich:

1) die Lage der Tangente gegen die Axe, und auf welcher Seite des Mittelpunctes dieſe Tangente die Axe ſchneidet.

2) daß der Winkel KFM dem Winkel MTN, den die Tangente mit der Axe macht, allemal gleich ſeyn müſſe.

3) daß dieſe beyden gleichen Winkel immer größer werden, und ſich einem rechten Winkel nähern, je näher M nach dem Scheitel A zu rückt, ſo wie im Gegentheil die beſtimmte Tangente auf den Fall abnimmt; und umgekehrt wächſt, wenn KFN ſich vermindert, und daß folglich über A, den Anfange der Abſciſſen, eine unbeſtimmte Tangente GH auf der Axe ſenkrecht ſtehen müſſe. Eben das gilt auch für den andern Scheitelpunct B.

4) daß hingegen die beſtimmte Tangente MT an den beyden Scheiteln Null werde, oder verſchwinde, weil alsdenn, wenn M auf A oder B fällt, FK = o wird: ſo wie die Tangente des Cirkels in der Trigonometrie für die Grade o und 180 gleichfalls o iſt. Endlich

5) daß in der Ellipſe, wenn FM = fM wird [in dem Puncte, wo die Semiordinate der halben kleinen Axe gleich iſt (Alg. 365.)] alſo FK in FN fällt, und der Winkel KFN unendlich klein oder Null iſt: die Tangente an dieſem Puncte, ſowohl in Abſicht der Lage von FK als auch des unendlich kleinen Winkels KFN, mit der Axe parallel laufen und alſo die Tangente und Subtangente für den Quadranten der Ellipſe, eben ſo wie die trigonometriſche Tangente und Secante für den Quadranten des Cirkels, unendlich ſeyn müſſe.

15. Zuſ. 4. Wenn man aus dem Puncte M des rechtwinklichten Triangels TMN, das Perpendikel MP auf die Axe herabläßt: ſo ſind mit dieſer Ordinate PM, nicht allein PT und PN (3) ſondern auch die Abſciſſen AP

AP = x und CP = u der Größe nach gegeben. Folglich kann man für jeden in dem Umfange des Schnitts gegebenen Punct, dieſe Abſciſſen als bekannt anſehen, und die Werthe der dafür zu ſuchenden Linien, in dieſen Abſciſſen oder ihren Functionen, mit Zuziehung der in der Gleichung für die Linie befindlichen beſtändigen Größen ausdrücken. Es wird ſich alſo für jede Linie des Schnitts, dergleichen PT, PN, MT, MN ꝛc. ſind, ein doppelter Ausdruck angeben laſſen, je nachdem man die veränderliche Größe x oder u (die Abſciſſe vom Scheitel oder vom Mittelpuncte) in den Werth der Linie zu bringen ſucht, welcher außerdem durch die mitverbundnen unveränderlichen oder beſtändigen Größen noch mehrere Geſtalten annehmen kann. Mehrentheils ſucht man den Werth dieſer Linien in den Abſciſſen x oder ihren Dignitäten, mit Zuziehung der großen Axe und des Parameters zu beſtimmen, weil ſich die ſolchergeſtalt für die Ellipſe oder Hyperbel gefundenen Ausdrücke am leichteſten auf die Parabel anwenden laſſen; wiewohl auch die Werthe in welchen u befindlich iſt, ihren vielfachen Nutzen haben, und ſehr oft kürzer ausfallen als die erſtern. Ich werde in der Folge dieſe Linien in den Werthen ſowohl von x als u angeben.

16. Aufg. 3 **Einen Ausdruck für die Subtangente PT zu finden**

Aufl. 1.) für die **Ellipſe** (Fig. 5.) Weil TM $\parallel$ FK (5) ſo iſt FKf $\backsim$ TMf, alſo

$$fK : fF = KM : FT$$

oder (in den Werthen dieſer Linien (Alg. 376. 378.) und

weil $KM = FM = \frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$, alſo $fK = fM$

$-MK = fM - FM = \frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{a^2 - c^2}}{a} -$

$\left(\frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{a^2 - c^2}}{a}\right) = \frac{2u\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \frac{2ur}{a}$, wenn

man $\sqrt{a^2 - c^2} = r = fF$ ſetzt) $FT = \frac{fF.KM}{fK} =$

$\frac{a^2}{4u} - \frac{r}{2}$. Nun iſt

$$FP = FC - CP = \frac{r}{2} - u$$

alſo $FT + FP = \frac{a^2}{4u} - u = \frac{\frac{1}{4}a^2 - u^2}{u} = PT$

Fiele der Punct P zwiſchen F und A, ſo wäre alsdenn $FP = PC - CF = u - \frac{r}{2}$ und $PT = FT - FP =$ $\frac{a^2}{4u} - \frac{r}{2} - u + \frac{r}{2} = \frac{a^2}{4u} - u$, dem vorigen nichts deſto weniger gleich.

In dieſen gefundenen Werth von PT, $\frac{1}{2}a - x$ ſtatt u ſubſtituirt (Alg. 368.) giebt

$$PT = \frac{a^2 - 4(\frac{1}{2}a - x)^2}{4(\frac{1}{2}a - x)} = \frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x} = \frac{(a - x)x}{\frac{1}{2}a - x}$$

wo x die Abſciſſe AP vom Scheitel A an gerechnet bedeutet.

II.) für die Hyperbel. (Fig. 6.) Wenn man hier $\sqrt{a^2 + c^2} = s$ ſetzt, ſo iſt (Alg. 405. 406.) $fK = \frac{2us}{a}$ $= fM + FM$. Da nun hier, wie in der Ellipſe:

fK

$$fK\left(\frac{2su}{a}\right) : fF\,(s) = KM\left(\frac{su}{a} - \frac{a}{2}\right) : FT$$

ſo iſt $FT = \frac{s}{2} - \frac{a^2}{4u}$

aber $FP = CP - CF = u - \frac{s}{2}$

alſo $FT + FP = u - \frac{a^2}{4u} = \frac{4u^2 - a^2}{4u} = \frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u}$ $= PT.$

Auch hier kann P zwiſchen F und A fallen. Dann iſt $FP = CF - CP$ und $PT = FT - FP$. Dem ohngeachtet bleibt der Ausdruck für $PT = \frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u}$, und alſo eben derſelbe.

In dieſen gefundnen Werth $\frac{1}{2}a + x$ ſtatt u ſubſtituirt (Alg. 402.) giebt

$$PT = \frac{4(\frac{1}{2}a + x)^2 - a^2}{4(\frac{1}{2}a + x)} = \frac{ax + x^2}{\frac{1}{2}a + x} = \frac{(a+x)\,x}{\frac{1}{2}a + x}.$$

17. Anm. In vorſtehenden beyden Aufloͤſungen iſt das Verfahren fuͤr die Ellipſe und Hyperbel vollkommen einerley, und die Vergleichung dieſer und anderer Rechnungen fuͤr dergleichen Linien zeigt offenbar, daß das Reſultat derſelben bey beyden gemeiniglich in nichts als in den Zeichen einiger Glieder verſchieden ſey. Die Folge wird dieſes noch mehr beſtaͤtigen, und nur in wenigen beſondern Faͤllen eine Ausnahme machen. So werden z. E. die beyden (I. II.) gefundenen Werthe in dieſen Ausdruck

$$PT = \frac{\pm\frac{1}{4}a^2 \mp u^2}{u} = \pm\frac{(\frac{1}{4}a^2 - u^2)}{u}, \text{ d. i.}$$

$\frac{ax \mp x^2}{\frac{1}{2}a \mp x} = \frac{2x(a \mp x)}{a \mp 2x}$ insgemein zuſammen-gefaßt, wo die obern Zeichen für die Ellipſe, die untern für die Hyperbel gelten.

Die Subtangente hat übrigens, ſo wie andere mit ihr verbundene Linien in der Algebra einen beträchtlichen Nutzen. Vermittelſt derſelben kann man auch die Aufgabe (5) analytiſch löſen, weil ſie den Punct T, wo die Tangente die Axe, den Diameter, oder irgend eine andere der Lage nach gegebene Abſciſſenlinie ſchneidet, durch ihre Länge finden, und dadurch mit dem gegebenen Puncte M die Lage und Größe der Tangente beſtimmen lehrt.

18. Zuſ. 1. Aus $PT = \frac{(a \mp x)x}{\frac{1}{2}a \mp x}$ folgt:

$$(\tfrac{1}{2}a \mp x) : x = (a \mp x) : PT$$

die Subtangente iſt alſo in der Ellipſe und Hyperbel die vierte Proportionale zu CP, AP, BP; das heißt, für die Ellipſe: die vierte Proportionale zu der Abſciſſe aus dem Mittelpuncte und den Segmenten der großen Axe.

19. Zuſ. 2. Weil man die Parabel als eine Ellipſe von einer unendlich großen Axe anſehen kann (7) ſo ſetze man in $PT = \frac{2x(a \mp x)}{a \mp 2x}$ (17) $a = \infty$, ſo kommt PT $= \frac{2x(\infty - x)}{\infty - 2x} = \frac{2x\infty}{\infty} = 2x$ für die Subtangente der Parabel. Auch giebt der Ausdruck von PT folgende Proportion:

$$a \mp 2x : 2x = a \mp x : PT$$

Da

Da nun in der Ellipſe $a - x > a - 2x$, ſo iſt auch $PT > 2x$, aber in der Hyperbel, wo $a + x < a + 2x$, dieſes $PT < 2x$. Es iſt alſo: die Subtangente in der Parabel der doppelten Abſciſſe ($2x$) gleich, größer als ſie in der Ellipſe und kleiner in der Hyperbel.

20. Zuſ. 3. Wollte man den Ausdruck für die Subtangente der Parabel unabhängig von der Ellipſe finden, ſo könnte das auf die Art geſchehen, die ich in meiner Abhandlung von den Haupteigenſchaften der Kegelſchnitte §. LXXI. gezeigt habe. Man kann aber auch hierbey nach einer Methode verfahren, die ſich überhaupt auf mehrere krumme Linien erſtreckt, deren Gleichungen gegeben ſind. ARN (Fig. 7.) ſey ein Bogen einer krummen Linie, die von der geraden Linie GH in den Puncten R, N ꝛc. geſchnitten wird. Dieſe Linie GH laſſe man in Gedanken mit einer ſich immer parallel bleibenden Bewegung nach M zurücken: ſo kommen die Puncte R, N, ſo wie die zugehörigen Ordinaten PR, QN, immer näher an einander, bis endlich beyde Puncte auf M, als einen doppelten Durchſchnittspunct (Alg. 452.) und beyde Ordinaten auf Mp fallen, alſo $PQ = 0$; MT zur Tangente und PT zur Subtangente wird. Man drücke alſo das Verhältniß zwoer Ordinaten, wie QN, PR, oder ihrer Dignitäten, vermittelſt der gegebenen Gleichung für die Linie aus, und vergleiche ſie mit dem Verhältniſſe eben der Dignitäten von dieſen Ordinaten aus den ähnlichen Triangeln tQN, tPR der Figur: ſo ergiebt ſich alsdenn der algebraiſche Ausdruck der Subtangente von ſelbſt. Wäre nun

$QN^m : PR^m = p : q$ nach der Gleichung;

und $QN^m : PR^m = Qt^m : Pt^m$ nach den ähnl. Tr. der Fig.

ſo fände man $p : q = Qt^m : Pt^m$, wo Pt und alſo auch, nach der Vorausſetzung, PT gegeben iſt.

Exem-

Exempel für die Kegelſchnitte. In der Parabel iſt

$$QN^2 : PR^2 = (AP + PQ) : AP \quad \text{(Alg. 357)}$$
$$QN^2 : PR^2 = (tP + PQ)^2 : Pt^2 \quad \text{aus der Fig.}$$

$$(AP + PQ) : AP = (Pt^2 + 2Pt.PQ + PQ^2) : Pt^2 \quad \text{ex æquo subtr.}$$

$$PQ : AP = (2Pt.PQ + PQ^2) : Pt^2$$

$$\text{alſo } Pt^2.PQ = (2Pt.PQ + PQ^2)\, AP$$
$$\text{oder } Pt^2 = (2Pt + PQ)\, AP$$

alſo beym Zuſammenfallen der Puncte R, N, in M, oder für den Fall der Tangente, (wo AP ſo wie $AQ = Ap = x$; tP und $tQ = Tp$; alſo $PQ = 0$ wird) $Tp^2 = 2Tp.x$ oder $Tp = 2x$ (19.) Eben ſo fände man für die Ellipſe und Hyperbel, wo $QN^2 : PR^2 = (a \mp AQ)\, AQ : (a \mp AP)\, AP$ (Alg. 374.)

$$Tp = \frac{ax \mp xx}{\frac{1}{2}a \mp x} \quad (17).$$

21. Zuſ. 4. Auch kann man die Subtangente einer Linie ſehr leicht durch folgende Regel des Sluſius finden, welcher ich hier, ihrer Bequemlichkeit wegen, gedenken will: Man bringe alle Glieder einer gegebenen Gleichung auf eine Seite oder ſetze ſie gleich Null; die Subtangente iſt alsdenn einem Bruche gleich, deſſen Zähler aus allen Gliedern von y (der Ordinate) mit ihren Zeichen, in die zugehörigen Exponenten multiplicirt: der Nenner aus allen, gleichfalls mit ihren Exponenten multiplicirten, ſodann durch x dividirten, aber mit den entgegen geſetzten Zeichen geſchriebenen Gliedern von x (der Abſciſſe) beſteht. Diejenigen Glieder, die kein x oder y haben, fallen weg, weil ſie als ſolche, die in x^0 oder y^0 multiplicirt ſind, betrachtet, und alſo durch den Exponenten 0, der nun ein Factor des ganzen Gliedes wird, vernichtet werden.

Expl.

Expl. Für die allgemeine Gleichung $y^m = \alpha + \beta x^n + \gamma x^h y^k$ oder $y^m - \gamma x^h y^k - \beta x^n - \alpha = 0$; wären $y^m - \gamma x^h y^k$ alle Glieder in denen ſich y, und $-\beta x^n - \gamma y^k x^h$ alle Glieder in denen ſich x befindet. Alſo, nach der Vorſchrift, $PT = \dfrac{m y^m - \gamma k x^h y^k}{n \beta x^{n-1} + \gamma h y^k x^{h-1}}$.

Für die Parabel wären alſo hier $\beta = p$; $m = 2$; $n = 1$; α und $\gamma = 0$; alſo $PT = \dfrac{2y^2}{px^0} = \dfrac{2px}{p} = 2x$ (19).

Für die Ellipſe und Hyperbel wären β; m; n; α; wie in der Parabel $= p$; 2; 1; 0; und $\gamma = \mp \dfrac{p}{a}$; $h = 2$; $k = 0$; alſo $PT = \dfrac{2y^2}{px^0 \mp \dfrac{2px}{a}} = \dfrac{2p\left(x \mp \dfrac{x^2}{a}\right)}{p\left(1 \mp \dfrac{2x}{a}\right)}$

$= \dfrac{2x(a \mp x)}{a \mp 2x}$ (17). Eben den Werth würde man, und zwar noch geſchwinder, aus der Gleichung $y^2 - px \pm \dfrac{px^2}{a} = 0$ ſelbſt erhalten haben. Für unendliche Parabeln $y^m - p^n x^k = 0$ wäre $PT = \dfrac{my^m}{kp^n x^{k-1}}$

$= \dfrac{m}{k} x$; und für unendliche Hyperbeln zwiſchen ihren Aſymptoten $y^m x^k - a^{m+k} = 0$, käme

$$PT = \frac{m y^m x^n}{-n y^m x^{n-1}} = -\frac{m}{k} x.$$

Hier

Hier iſt alſo die Subtangente der vorſtehenden Parabel-Subtangente gleich aber entgegengeſetzt; daß alſo, nach der Bedeutung der Zeichen, im letztern Falle Subtangente und Anfang der Abſciſſen auf verſchiedenen Seiten, ſo wie im erſtern auf einer Seite der Ordinate zu liegen kommen.

22. Anm. Dieſe Regel, die ſich noch weiter als die vorhergehende erſtreckt, iſt eigentlich nur eine Verkürzung des von Fermat bey Suchung der Subtangente vorgeſchriebenen Verfahrens, von welchem ſie das letzte Reſultat auf eine mechaniſche Art finden lehrt. Man findet ihrer heut zu Tage in wenigen Schriften gedacht, weil ſie von der Differenzialformel für die Subtangente, die gleichſam als eine Erweiterung der Fermatiſchen oder vielmehr Barrowiſchen Tangenten-Methode angeſehen werden kann, und die auch im Grunde einerley mit ihr iſt, verdrängt worden iſt. Ich habe daher den Beweis dieſer Regel hier nicht beybringen wollen. Die Differentialformel iſt freylich von viel allgemeinern Gebrauche, und überſteigt alle Hinderniſſe, die der Sluſiſchen Regel, ſo wie andern, oft Gränzen ſetzen, dergleichen die Irrationalgrößen und die binomiſchen oder polynomiſchen Potenzen von einem unbeſtimmten Exponenten (m) u. ſ. w. ſind. Wo ſie aber ſtatt findet, ſo hat ſie die Bequemlichkeit, daß man die Subtangente ſogleich ausdrücken kann, ohne vorher die oft weitläuftige Verwandlung der Gleichung nach dem Fermat vorzunehmen, ja ſelbſt ohne die Gleichung zuvor zu differenziiren, wie bey der Differenzialformel geſchehen muß, wenn man aus ihr den Werth der Subtangente herleiten will.

23. Zuſ. 5. In $PT = \frac{\pm [\frac{1}{4}a^2 - u^2]}{u}$ (17) wird für $u = \frac{1}{2}a$ der Zähler, und alſo das ganze $PT = 0$. Für $x = 0$, wird auch $PT = 2x = 0$ (19), die Subtangente alſo für die Scheitelpuncte aller Kegelſchnitte verſchwindet, indem ſie gleich Null wird.

24. Zuſ.

24. Zuſ. 6. Setzt man aber $u = 0$, ſo wird der Nenner Null, alſo in der Ellipſe $PT = \frac{\frac{1}{4}a^2}{0} = \infty$ (14. 5)

Für die Hyperbel wäre alsdenn $PT = -\frac{\frac{1}{4}a^2}{0} = -\infty$.

Da aber der Abſciſſe $u = 0$ in der Hyperbel kein Punct der krummen Linie zugehört (Alg. 401.) ſo giebt es auch hier keine Subtangente. Hierauf muß man wohl acht haben; denn die Formel der Subtangente, und anderer dergleichen Linien, kann gar wohl für eine gewiſſe Abſciſſe einen Werth geben, der aber durch die Gleichung der Linie wieder ausgeſchloſſen wird, wenn dieſe Abſciſſe einer unmöglichen Ordinate zugehört. So wäre auch in der Ellipſe für $u = a$; $PT = -\frac{3}{4}a$, welches aber, wegen der unmöglichen Ordinate (Alg. 375.) hier wegfällt. Außerdem kann es wohl geſchehen, daß der Ausdruck für die Subtangente ꝛc. negativ wird. Die Bedeutung und Lage einer ſolchen Subtangente iſt (21) erklärt worden.

25. $AT = PT - AP$ alſo (17. und Alg. 368. 402)

$$AT = \begin{cases} \dfrac{\pm a^2 + 4u^2}{4u} - \left(\pm \frac{a}{2} \mp u\right) = \dfrac{\pm a^2 \mp 2au}{4u} \\ \quad = \pm \dfrac{a(a - 2u)}{4u} \quad \text{(I)} \\ \dfrac{2ax + 2x^2}{a \mp 2x} - x = \dfrac{ax}{a \mp 2x} = \dfrac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a \mp x} \quad \text{(II)} \end{cases}$$

alſo iſt AT die vierte Proportionale zu CP, CA, AP.

26. Zuſ. 1. Für $a = \infty$ wird $AT = x$, in der Parabel. Alſo iſt AT der correſpondirenden Abſciſſe (x) gleich in der Parabel, größer als ſie in der Ellipſe, und kleiner in der Hyperbel.

27. Zuſ.

Zuſ. 2. Für x = o oder $\pm$ a, wird auch AT = o. Für $x = \frac{1}{2}a$ iſt AT = ∞ in der Ellipſe. Nun kann in der Parabel und Hyperbel x auch unendlich werden (Alg. 355. 394.) auf den Fall iſt AT = ∞ in der Parabel; in der Hyperbel hingegen $AT = \frac{a\,\infty}{2\,\infty} = \frac{1}{2}a$. Hieraus erhellet:

1) daß bey jeder endlichen Abſciſſe der Hyperbel die zugehörige Tangente die Hauptaxe in einem zwiſchen dem Mittel- und nächſten Scheitelpuncte gelegenen Puncte T ſchneiden müſſe.

2) daß man durch den Mittelpunct der großen Axe, auf beyden Seiten derſelben, eine unbegränzte Linie dergeſtalt legen könne, daß ſie die Schenkel der Hyperbel in einem vom Scheitel unendlich entfernten Puncte berühret. Dieſe eingebildete Tangente, heißt, wie bekannt, die Aſymprote (Alg. 408).

28. CT = AC $\pm$ AT, alſo (25)

$$CT = \begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{a(a-2u)}{4u} = \frac{a^2}{4u} = \frac{\frac{1}{4}a^2}{u} & \text{(I)} \\ \frac{1}{2}a \pm \frac{ax}{a \mp 2x} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{a \mp 2x} = \frac{\frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{2}a \mp x} & \text{(II).} \end{cases}$$

29. Zuſ. 1. Aus $\frac{\frac{1}{4}a^2}{u} = CT$ folgt: $u : \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a : CT$, daß alſo CT die dritte Proportionale zu CP und AC iſt; woraus man ſehr leicht den Punct T finden kann, in welchem eine Tangente an den gegebenen Punct M der krummen Linie die Hauptaxe ſchneidet.

30. Zuſ.

30. Zuſ. 2. In $\frac{\frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{2}a \mp x}$ wäre, für $a = \infty$, ein CT in der Parabel $= \frac{1}{4}\infty^2 : \frac{1}{2}\infty = \frac{1}{2}\infty$, welcher Ausdruck ein Beweiß der Richtigkeit und Uebereinſtimmung des Calculs iſt, weil er zu erkennen giebt, daß, wenn man auch in der Parabel einen Mittelpunct annehmen wollte, derſelbe wie bey der Ellipſe und Hyperbel, in der Hälfte der unendlichen Axe liegen, und alſo auch unendlich vom Scheitel entfernt ſeyn müßte; das heißt nichts weiter, als daß es in der Parabel kein ſolches CT, keinen Mittelpunct, giebt.

31. Zuſ. 3. Für $u = \frac{1}{2}a$ iſt $CT = \frac{1}{2}a$; Für $u = 0$ iſt $CT = \infty$. In der Hyperbel aber giebt es kein dergleichen CT, weil dieſer Abſciſſe kein Punct der Hyperbel zugehört (Alg. 401). Für $u = \infty$ iſt in der Hyperbel $CT = \frac{a^2}{4\infty} = 0$, für die Aſymptote (27. 2).

32. Aufg. 4. Einen Ausdruck für die Subnormale PN zu finden.

Aufl. In dem rechtwinklichten Triangel TMN iſt $PT : PM = PM : PN = \frac{PM^2}{PT}$ alſo (17. u. Alg. 368. 402.)

$$PN = \begin{cases} \pm\frac{c^2(\frac{1}{4}a^2 - u^2)}{a^2} : \pm\frac{(\frac{1}{4}a^2 - u^2)}{u} = \frac{c^2u}{a^2} & \text{(I)} \\ \pm\frac{p(\frac{1}{4}a^2 - u^2)}{a} : \pm\frac{(\frac{1}{4}a^2 - u^2)}{u} = \frac{pu}{a} & \text{(II)} \\ \frac{(a \mp x)c^2x}{a^2} : \frac{(a \mp x)x}{\frac{1}{2}a \mp x} = \frac{c^2}{2a} \mp \frac{c^2x}{a^2} & \text{(III)} \\ \frac{(a \mp x)px}{a} : \frac{(a \mp x)x}{\frac{1}{2}a \mp x} = \frac{p}{2} \mp \frac{px}{a} & \text{(IV).} \end{cases}$$

33. Anm. Hier iſt PN auf eine vierfache Art (15.) ausgedrückt worden, welches bey den vorigen Linien nicht nöthig geweſen, in welchen mit den Abſciſſen u, x nur eine Conſtans (a) verbunden iſt, von der man bey allen Kegelſchnitten Gebrauch machen kann. Dieſe vier Werthe ſind übrigens unmittelbar aus den Gleichungen der Ellipſe und Hyperbel für den Scheitel und Mittelpunct hergeleitet worden, welches wegen nur gemeldeter Bequemlichkeit des PT wohl angehet. Auſſerdem hätte man durch bloße Subſtitution der gehörigen Buchſtaben aus den Gleichungen $c^2 = ap$; (Alg. 366. 399.) $u = \frac{1}{2} a \mp x$ (Alg. 367. 402.) aus einem gefundenen Werthe die übrigen herleiten können. Jeder Werth für die **Ellipſe** dieſer und aller folgenden Linien läßt ſich ſogleich auf den **Cirkel** anwenden, wenn man in ihm $a = c = p$ ſetzt: (Alg. 372.) welches ich hier einmal für allemal erinnern will. Der Ausdruck der vorherberechneten (16 — 28) Linien, iſt alſo für die **Ellipſe** und den **Cirkel** einerley.

34. Zuſ. 1. Für $a = \infty$ iſt $PN = \frac{1}{2} p$, oder die Subnormale in der Parabel dem halben Parameter gleich und alſo beſtändig und unveränderlich. Folglich iſt die Subnormale dem halben Parameter gleich in der Parabel, kleiner in der Ellipſe und gröſſer in der Hyperbel.

35. Zuſ. 2. Weil $PN = \frac{pu}{a}$ für die Ellipſe und Hyperbel einerley Zeichen hat: ſo ſchließt man mit Recht, daß beyde Linien, bey einerley Axe und Parameter, und für gleich große Abſciſſen aus dem Mittelpuncte, einerley Subnormalen der Größe und Lage nach haben müſſen. Nun kann aber kein u in der Ellipſe größer (Alg. 375.) und in der Hyperbel kleiner (Alg. 401.) als $\frac{1}{2}a$ ſeyn, und iſt alſo der einzige Fall der Gleichheit für $u = \frac{1}{2}a$, wo alsdenn in beyden Fällen $PN = \frac{1}{2} p$, wie in der Parabel.

36. Zuſ.

36. Zuſ. 3. Wenn man auch in der Parabel einen Mittelpunct C annehmen wollte, von welchem man eine Abſciſſe CP = u rechnete: ſo würde derſelbe wie in den beyden andern Sectionen gleichfalls in der Mitte der unendlich großen Axe (a) liegen, alſo $u = \frac{1}{2}a \mp x$ ſeyn, nachdem man die Parabel als eine Ellipſe oder Hyperbel anſehen wollte. Nach gehöriger Subſtitution müßte man ſodann $a = \infty$ ſetzen, und ſo wäre $\frac{pu}{a} = \frac{p}{a}(\frac{1}{2}a \mp x) = \frac{\frac{1}{2}p\,\infty}{\infty} \mp \frac{px}{\infty} = \frac{1}{2}p = PN$ wie (34).

37. Zuſ. 4. Für $u = \infty$ iſt in der Hyperbel $PN = \infty$; für $u = 0$ iſt in der Ellipſe $PN = 0$, aber $PT = \infty$ (24). Eben dieſes folgte aus der Proportion

$$PT(\infty) : PM(\tfrac{1}{2}c) = PM(\tfrac{1}{2}c) : PN = \frac{c^2}{4\,\infty} = 0.$$

In $PM^2 = PT \cdot PN$ kann alſo für ein endliches PM der eine Factor unendlich klein, der andere unendlich groß werden, und doch beyder Product endlich ſeyn. Dergleichen Fälle kommen ſehr oft in trigonometriſchen Rechnungen vor. Ein Beyſpiel hiervon giebt Alg. 422. X. und die Gleichung $xy = \alpha^2$, für die Hyperbel.

38. Zuſ. 5. Aus $\frac{pu}{a} = PN$ folgt endlich, daß die Subnormale die vierte Proportionale zu der großen Axe, dem Parameter und der Abſciſſe aus dem Mittelpuncte ſey.

39. Zuſ. 6. Eine ähnliche Regel für die Subnormale, wie die Sluſiſche für die Subtangente (21) ließe ſich aus letzterer folgendergeſtalt herleiten. Man

ſetze $PT = \frac{Y}{X}$ (wo Y den Zähler, ſo wie X den Nenner des Sluſiſchen Ausdrucks der Subtangente bedeuten mag) ſo iſt $PT\ [\frac{Y}{X}] : PM\ [y] = PM\ [y] : PN = \frac{Xy^2}{Y}$ $= \frac{X}{Yy^{-2}}$. Alſo (21.) die Subnormale einem Bruche gleich, deſſen Zähler aus allen mit den zugehörigen Exponenten multiplicirten, ſodann durch x dividirten, aber mit den entgegengeſetzten Zeichen geſchriebenen Gliedern von x (der Abſciſſe); der Nenner aus allen, mit ihren Zeichen in die Exponenten multiplicirten, ſodann durch y^2 dividirten Gliedern von y (der Ordinate) beſteht. Es verſteht ſich, daß auch hier, wie dort, die Zeichen ſich auf die zuvor auf Null reducirte Gleichung beziehen, und die Glieder, die kein x oder y haben, ganz wegfallen.

Expl. Für die Gleichung (21) wäre die Subnormale $PN = \frac{n\beta x^{n-1} + h\gamma y^k x^{h-1}}{my^{m-2} - k\gamma x^h y^{k-2}}$ alſo, nach dem dortigen Werthe der Buchſtaben, für die Ellipſe und Hyperbel: $PN = \frac{px^0 \mp \frac{2py^0x}{a}}{2y^0} = \frac{p}{2} \mp \frac{px}{a}$ (32. IV.) u. ſ. w.

40. AN = PN + AP alſo (32. und Alg. 367. 402.)

AN =

$$AN = \begin{cases} \frac{c^2u}{a^2} \pm \left(\frac{a}{2} - u\right) = \frac{c^2u \pm \frac{1}{2}a^3 \mp a^2u}{a^2} \\ = \frac{c^2u \pm a^2(\frac{1}{2}a - u)}{a^2} \quad (I) \\ \frac{pu}{a} \pm (\frac{1}{2}a - u) = \frac{pu \pm \frac{1}{2}a^3 \mp au}{a} \\ = \frac{pu \pm a(\frac{1}{2}a - u)}{a} \quad (II) \\ \frac{c^2}{2a} \mp \frac{c^2x}{a^2} + x = \frac{\frac{1}{2}ac^2 \mp c^2x + a^2x}{a^2} \\ = \frac{a^2x + c^2(\frac{1}{2}a \mp x)}{a^2} \quad (III) \\ \frac{p}{2} \mp \frac{px}{a} + x = \frac{\frac{1}{2}ap \mp px + ax}{a} \\ = \frac{ax + p(\frac{1}{2}a \mp x)}{a} \quad (IV) \end{cases}$$

41. Zuſ. 1. Für $a = \infty$ fällt das Glied $\mp \frac{px}{a}$ ganz weg, und bleibt für die Parabel $AN = \frac{p}{2} + x$. Für $x = \frac{1}{2}a$ iſt in der Ellipſe $AN = \frac{1}{2}a = AC$, weil alsdenn der Punct N in C fällt.

42. Zuſ. 2 Weil $AN = \frac{1}{2}p + \frac{(a \mp p)x}{a}$, und in der Parabel $= \frac{1}{2}p + x$, ſo iſt für $x = 0$, AN überall $= \frac{1}{2}p$. Auch iſt klar, daß in der Hyperbel und Parabel AN immer größer wird, jemehr x wächſt, und für ein unendliches x auch unendlich werden kann. So kann

auch der Punct N auf der Axe niemals zwiſchen den Scheitel und den nächſten Brennpunct fallen, ſondern allemal über denſelben hinaus.

43. Aufg. 5. Einen Ausdruck für die Normale MN zu finden.

Aufl. In dem rechtwinklichten Triangel MPN iſt $NM^2 = PM^2 + PN^2$, alſo (32 u. Alg. 368. 402.)

$$MN^2 = \begin{cases} \dfrac{\pm\frac{1}{4}a^2c^2 \mp c^2u^2}{a^2} + \dfrac{c^4u^2}{a^4} \\ \quad = \dfrac{\pm\frac{1}{4}a^4c^2 \mp a^2c^2u^2 + c^4u^2}{a^4} \\ \quad = \dfrac{c^2(c^2u^2 \pm a^2[\frac{1}{4}a^2 - u^2])}{a^4} \qquad \text{(I)} \\ \dfrac{\pm\frac{1}{4}a^2p \mp pu^2}{a} + \dfrac{p^2u^2}{a^2} \\ \quad = \dfrac{\pm\frac{1}{4}a^3p \mp apu^2 + p^2u^2}{a^2} \\ \quad = \dfrac{p(pu^2 \pm a[\frac{1}{4}a^2 - u^2])}{a^2} \qquad \text{(II)} \\ \dfrac{ac^2x \mp c^2x^2}{a^2} + \left(\dfrac{c^2}{2a} \mp \dfrac{c^2x}{a^2}\right)^2 \\ \quad = \dfrac{a^3c^2x \mp a^2c^2x^2 + \frac{1}{4}a^2c^4 \mp ac^4x + c^4x^2}{a^4} \\ \quad = \dfrac{c^2(c^2[\frac{1}{2}a \mp x]^2 + a^2x[a \mp x])}{a^4} \qquad \text{(III)} \end{cases}$$

apx

$$NM^2 = \begin{cases} \dfrac{apx \mp px^2}{a} + \left(\dfrac{p}{2} \mp \dfrac{px}{a}\right)^2 \\[2ex] = \dfrac{a^2px \mp apx^2 + \frac{1}{4}a^2p^2 \mp ap^2x + p^2x^2}{a^2} \\[2ex] = \dfrac{p(p[\frac{1}{2}a \mp x]^2 + ax[a \mp x])}{a^2} \quad \text{(IV)} \end{cases}$$

44. Zuſ. 1. Für $a = \infty$ iſt $MN^2 = \frac{1}{4}p^2 + px = \dfrac{p(p+4x)}{4}$ in der Parabel; alſo $NM = \frac{1}{2}\sqrt{p(p+4x)}$.

45. Zuſ. 2. Für $x = 0$ iſt in allen Kegelſchnitten $NM^2 = \frac{1}{4}p^2$ oder $NM = \frac{1}{2}p$. Eben das erfolgt, wenn man für die Ellipſe oder Hyperbel $x = \pm a$ ſetzt. Setzt man aber für die erſtere $x = \frac{1}{2}a$, ſo kommt $NM^2 = \dfrac{a^4c^2}{4a^4}$ alſo $NM = \frac{1}{2}c$. Hieraus iſt klar:

1) Daß die Normale für eine unendlich kleine Abſciſſe in allen Kegelſchnitten einerley, und nie kleiner als die Hälfte des Parameters ſeyn kann; ingleichen, daß die Normale, wenigſtens in der Parabel und Hyperbel, beſtändig wächſt, wenn x wächſt, ſo daß für $x = \infty$ die Normale ſelbſt in beyden unendlich wird.

2) Daß in der Ellipſe die Normale niemals größer als die halbe kleine Axe werden kann.

45. Aufg. 6. Einen Ausdruck für die Tangente TM zu finden.

Aufl. Weil $TM^2 = PM^2 + PT^2$, ſo iſt (17. u. Alg. 368. 402.)

$$TM^2 = \begin{cases} \dfrac{\pm\frac{1}{4}a^2c^2 \mp c^2u^2}{a^2} + \dfrac{(\pm\frac{1}{4}a^2 \mp u^2)^2}{u^2} \\[2ex] = \dfrac{\frac{1}{16}a^6 - \frac{1}{2}a^4u^2 + a^2u^4 \pm \frac{1}{4}a^2c^2u^2 \mp c^2u^4}{a^2u^2} \\[2ex] = \dfrac{(a^2[\frac{1}{4}a^2 - u^2] \pm c^2u^2).(\frac{1}{4}a^2 - u^2)}{a^2u^2} \quad \text{(I)} \\[2ex] \dfrac{\pm\frac{1}{4}a^2p \mp pu^2}{a} + \dfrac{(\pm\frac{1}{4}a^2 \mp u^2)^2}{u^2} \\[2ex] = \dfrac{\frac{1}{16}a^5 - \frac{1}{2}a^3u^2 + au^4 \pm \frac{1}{4}a^2pu^2 \mp pu^4}{au^2} \\[2ex] = \dfrac{(a[\frac{1}{4}a^2 - u^2] \pm pu^2).(\frac{1}{4}a^2 - u^2)}{au^2} \quad \text{(II)} \\[2ex] \dfrac{ac^2x \mp c^2x^2}{a^2} + \left(\dfrac{ax \mp x^2}{\frac{1}{2}a \mp x}\right)^2 \\[2ex] = \dfrac{ac^2x \mp c^2x^2}{a^2} + \dfrac{a^2x^2 \mp 2ax^3 + x^4}{\frac{1}{4}a^2 \mp ax + x^2} \\[2ex] = \dfrac{(c^2x[\frac{1}{2}a \mp x]^2 + a^2x^2[a \mp x])(a \mp x)}{a^2(\frac{1}{2}a \mp x)^2} \quad \text{(III)} \\[2ex] \dfrac{apx \mp px^2}{a} + \left(\dfrac{ax \mp x^2}{\frac{1}{2}a \mp x}\right)^2 \\[2ex] = \dfrac{(px[\frac{1}{2}a \mp x]^2 + ax^2[a \mp x])(a \mp x)}{a(\frac{1}{2}a \mp x)^2} \quad \text{(IV).} \end{cases}$$

46. Zuſ. 1. Wenn man $a = \infty$ ſetzt, bekommt man MT^2 für die Parabel. In dem erſten Theile nämlich von

von IV. bleibt nur das Glied $\frac{\infty px}{\infty}$ und in dem Zähler des andern Theils verſchwinden alle Glieder vor $\infty^2 x^2$, ſo wie in dem Nenner vor $\frac{1}{4}\infty^2$ und iſt alſo $MT^2 =$

$$\frac{\infty px}{\infty} + \frac{\infty^2 x^2}{\frac{1}{4}\infty^2} = px + 4x^2 = 4AF.AP + 4AP^2$$

$$(\text{Alg. } 359.) = 4AP(AF + AP) = 4AP.FM \ (\text{Alg. } 360.)$$

47. Zuſ. 2. Für $x = 0$ oder $\pm a$, kommt $MT = 0$. Eben das geſchieht, wenn man in (46) $x = 0$ ſetzt. Alſo ſind alle Tangenten an den Scheitelpuncten der Kegelſchnitte gleich Null (14. 4.), und in ſo fern einander gleich. Eben dieſes würde erfolgen, wenn man in I. II. (45) $u = \frac{1}{2}a$ ſetzte.

48. Zuſ. 3. Für $u = 0$ wird $MT^2 = \frac{\frac{1}{16}a^4}{0}$, oder $MT = \infty$; alſo die Tangente für dieſe Abſciſſe in der Ellipſe, ſo wie für ein unendliches u oder x in der Hyperbel oder Parabel unendlich.

49. Aufg. 7. Einen Ausdruck für einen aus dem Scheitel A auf der Hauptaxe bis an die Tangente TM aufgerichteten Perpendikel AE zu finden.

Aufl. Weil $TPM \sim TAE$ ſo iſt $TP^2 : PM^2 = TA^2 : AE^2$, oder (17. 25. u. Alg. 368. 402.)

$$\frac{[\pm\frac{1}{4}a^2 \mp u^2]^2}{u^2} : \frac{[c^2(\pm\frac{1}{4}a^2 \mp u^2)]}{a^2}$$

$$= \frac{[a^2(a - 2u)^2]}{16u^2} : AE^2$$

und $\pm\frac{1}{4}a^2 \mp u^2$ aus den beyden erſten Gliedern, u^2 aus dem Nenner des erſten und dritten, und a^2 aus dem

Nenner des zweyten und Zähler des dritten Gliedes herausgeſtrichen

$$\pm\,(\tfrac{1}{4}a^2 - u^2) : c^2 = \frac{(a-2u)^2}{4\cdot 4} : AE^2, \text{ alſo}$$

$$AE^2 = \frac{c^2(a-2u)^2}{\pm\,4\cdot 4(\tfrac{1}{4}a^2-u^2)} = \frac{\pm\,c^2(a-2u)^2}{4(a^2-4u^2)} =$$

$$\frac{\pm\,c^2(a-2u)(a-2u)}{4(a-2u)(a+2u)} = \frac{\pm\,c^2(a-2u)}{4(a+2u)}$$

$$= \frac{\pm\,c^2[\tfrac{1}{2}a-u]}{4[\tfrac{1}{2}a+u]}$$ (I) oder, ap ſtatt c^2 ſubſtituirt,

$$AE^2 = \frac{\pm\,ap(\tfrac{1}{2}a-u)}{4(\tfrac{1}{2}a+u)} \quad \text{(II)}$$

Oder, $\tfrac{1}{2}a \mp x$ ſtatt u in I. II. ſubſtituirt,

$$AE^2 = \frac{\pm\,c^2.\pm x}{4(a\mp x)} = \frac{c^2x}{4(a\mp x)} \quad \text{(III)}$$

$$= \frac{apx}{4(a\mp x)} \quad \text{(IV)}$$

50. Zuſ. 1. Für $a = \infty$, kommt aus IV. für die Parabel $AE^2 = \frac{\infty px}{4\infty} = \frac{px}{4} = \frac{y^2}{4}$ oder $AE = \tfrac{1}{2}y$, der halben Ordinate gleich.

51. Zuſ. 2. In dem Ausdrucke $AE^2 = \pm \frac{c^2(a-2u)^2}{4(a^2-4u^2)}$ (49) in welchem das obere Zeichen für die Ellipſe, das untere für die Hyperbel gilt, ſetze

man

man in $\frac{+c^2(a-2u)^2}{4(a^2-4u^2)}$ den Werth der Abſciſſe für den Brennpunct, alſo $u = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{2}$; ſo kommt für die Ellipſe $AE^2 = \frac{c^2(a-\sqrt{a^2-c^2})^2}{4c^2} = \frac{(a-\sqrt{a^2-c^2})^2}{4}$ und $AE = \pm\frac{(a-\sqrt{a^2-c^2})}{2}$.

Eben ſo kommt, in $\frac{-c^2(a-2u)^2}{4(a^2-4u^2)}$ für die Hyperbel, $u = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{2}$ geſetzt,

$$AE^2 = \frac{-c^2(a-\sqrt{a^2+c^2})^2}{4.-c^2} = \frac{(a-\sqrt{a^2+c^2})^2}{4}$$

und $AE = \mp\frac{(a-\sqrt{a^2+c^2})}{2}$. Nun muß man, in beyden Fällen, für ein poſitives AE die obern, für ein negatives, die untern Zeichen brauchen, weil in der Ellipſe niemals $u > \frac{1}{2}a$, ſo wie in der Hyperbel niemals $u < \frac{1}{2}a$ ſeyn kann; dieſes giebt für die Ellipſe und Hyperbel, das poſitive, der Abſciſſe CF zugehörige $AE = \pm \frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2 \mp c^2})$ und das negative, der Abſciſſe Cf zugehörige $AE = \mp\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2 \mp a^2})$. In der Parabel, wo $AE = \frac{1}{2}y$ (50) kommt für das y aus dem Brennpuncte, welches $= \frac{1}{2}p$ (Alg. 358.) $AE = \frac{1}{4}p$. Wenn man die ſolchergeſtalt für ein poſitives AE in der

Para-

Parabel, Ellipſe und Hyperbel gefundenen Werthe: $\frac{1}{4}p$; $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} - \frac{1}{2}a$; genauer betrachtet, ſo findet man, daß ſie insgeſammt = AF ſind, der Weite des nächſten Brennpunctes vom Scheitel A (Alg. 359. 382. 405.) Eine durch den Punct T, in welchem die zu dieſem AE zugehörige Tangente die Axe ſchneidet, gezogene auf dieſer Axe ſenkrechte Linie, wird die Directrix des Kegelſchnitts genennt. Die Urſache dieſer Benennung wird unten gegeben werden.

52. Zuſ. 3. Für $u = \frac{1}{2}a$ oder $x = 0$ wird durchgehends AE = 0; daß alſo AE für eine Tangente am Scheitel bey allen drey Kegelſchnitten verſchwindet. Für $x = \pm a$ wird in der Ellipſe und Hyperbel AE = $\pm \infty$; welches alſo verſtanden werden muß. Ein AE für einen gewiſſen Punct wird allemal von der unbeſtimmten (13) geometriſchen Tangente GH für dieſen Punct, abgeſchnitten, und alſo der Länge und Lage nach beſtimmt; wie AE von der Tangente GH (Fig. 8. 9.) Für die Abſciſſe $x = \pm a$ aber oder für den Punct B, fällt GH auf BH, und kann alſo hier kein AE von der mit ihr längſt BH parallel laufenden GH, d. i. BH abgeſchnitten werden, und iſt alſo hier AE in beyden Sectionen unendlich, nur mit dem Unterſchiede, daß ein ſolches AE in der Ellipſe als $+\infty$ oberwärts, und in der Hyperbel als $= -\infty$ unterwärts der Axe, oder ſo wie die poſitiven und negativen Ordinaten angenommen werden, zu liegen kommt; denn eine Tangente an einen Punct M in der entgegengeſetzten (Alg. 404.) Hyperbel BM, (Fig. 9.) ſchneidet das negative AE unterwärts am andern Scheitel.

Zuſ. 4. Für $u = 0$, wird in der Ellipſe (Fig. 8.) $AE^2 = \frac{1}{4}c^2$ alſo $AE = \frac{1}{2}c = MC$ und die Tangente GH ſo wie die Subtangente unendlich (48) Für die Hyperbel

bel würde $AE^2 = -\frac{c^2}{4}$ und $AE = \sqrt{-\frac{c^2}{4}} =$ $\frac{1}{2}c\sqrt{-1}$ oder unmöglich, ſo wie es auch für eine dergleichen Abſciſſe in der Hyperbel keine Ordinate, oder keinen Punct der krummen Linie giebt.

54. Zuſ. 5. In der Parabel und Hyperbel kann x auch unendlich werden. Für ein ſolches x iſt im erſtern (50) Falle $AE = \frac{1}{2}\sqrt{p\infty}$, alſo auch unendlich. In der Hyperbel hingegen (49. III.) wird $AE^2 = \frac{c^2\infty}{4\infty} = \frac{c^2}{4}$ oder $AE = \frac{1}{2}c$ der halben zweyten Axe gleich. Da nun für ein ſolches x die Tangente durch den Mittelpunct geht (27. 2.) weil $CT = 0$, ſo darf man nur AE der halben zweyten Axe gleich machen, ſo wird eine Linie durch die Puncte C und E gelegt die Tangente für einen unendlich vom Scheitel entfernten Punct, d. i. die Aſymptote geben. Weil aber in der Parabel für $x = \infty$ auch $AE = \frac{1}{2}\infty$, ſo erhellet zugleich hieraus, daß die Parabel keine Aſymptote haben könne, weil man ſich dieſelbe in einer unendlichen Entfernung von der Axe gedenken müßte.

55. Anm. Auf eine ähnliche Art, wie die Linien (16—49) ſind ausgedrückt worden, könnte man auch TN, CN, TE, ME und andere mehr finden, wenn man ſie brauchte. In der Gleichung $y^2 = p\left(x \mp \frac{x^2}{a}\right)$ ſetze man $x = AF = f$, alſo $y = \frac{1}{2}p$ (Alg. 358.) ſo kommt $p = \frac{4af \mp 4ff}{a}$, alſo ap oder $c^2 = 4f(a \mp f)$ und $a =$

$c^2 \pm$

$\frac{c^2 \pm 4ff}{4f}$. Auch iſt FM² oder $\varphi^2 = (AP - AF)^2 + PM^2 = (x - f)^2 + p\,(x \mp \frac{x^2}{a})$ oder, den gefundenen Werth von p ſubſtituirt, $FM^2 = \left(\frac{af + (a \mp 2f)x}{a}\right)^2$, alſo $\varphi = f + \frac{Fx}{a}$ (wenn man $a \mp 2f$ oder $Ff = F$ ſetzt) und $f = \varphi - \frac{Fx}{a}$. Vermittelſt dieſer Gleichungen für a, c, p, f, φ kann man nun in die bereits berechneten Ausdrücke der Linien, die Werthe von AF, FM, Ff mit hineinbringen, welches in gewiſſen Fällen mit Vortheil geſchieht, und zugleich zu erkennen giebt, wie mannichfaltig ſich die Werthe dieſer Linien ausdrücken laſſen.

56. Aufg. 8. Berechnung der Linien (16—49) in Beziehung auf die zweyte oder Nebenaxe.

Aufl. Für die zweyte Axe iſt $u^2 = \frac{a^2}{4} \mp \frac{a^2 y^2}{c^2} = a^2 (\frac{1}{4}c^2 \mp \frac{y^2}{c^2}$, wo a, c die Haupt- und Nebenaxe, y die Abſciſſe aus dem Mittelpuncte C, u die Ordinate bedeutet. Nun iſt (Fig. 10. 11.)

$$PT \frac{(\pm \frac{1}{4}a^2 \mp u^2)}{u} : CT \frac{(\frac{1}{4}a^2)}{u} = PM\,(y) :$$

$Ct = \frac{a^2 y}{4(\pm \frac{1}{4}a^2 \mp u^2)}$ oder, den Werth von u² ſubſtituirt, $Ct = a^2 y : \frac{4a^2y^2}{c^2} = \frac{c^2}{4y}$. Ferner ſey in

der

der Ellipſe z eine Abſciſſe, wie a p, (Fig. 10.) deren Anfang, in dem Puncte a iſt, wo die kleine Axe die Ellipſe ſchneidet, ſo iſt $y = \frac{1}{2}c - z$ und $z = \frac{1}{2}c - y$; und wenn man auch hier einen Parameter $q = \frac{a^2}{c}$ auf der Nebenaxe nimmt: ſo iſt alsdenn, $cq = a^2$, und

$$Ct = \frac{c^2}{4y} = \frac{\frac{1}{4}c^2}{y} = \frac{\frac{1}{4}c^2}{\frac{1}{2}c - z} = \frac{Ca.Ca}{Cp}$$

$$pt = Ct \mp Cp = \frac{\frac{1}{4}c^2 \mp y^2}{y} = \frac{cz - z^2}{\frac{1}{2}c - z}$$

$$= \frac{(c-z)z}{\frac{1}{2}c - z} = \frac{bp.\,ap}{Cp}$$

$$at = Ct \mp aC = \frac{\frac{1}{4}c^2 \mp \frac{1}{2}cy}{y} = \frac{\frac{1}{2}cz}{\frac{1}{2}c - z} = \frac{aC.ap}{Cp}$$

$$pn = \frac{pM^2}{pt} \begin{cases} = \dfrac{a^2(\frac{1}{4}c^2 \mp y^2)}{c^2} : \dfrac{\frac{1}{4}c^2 \mp y^2}{y} \\ = \dfrac{a^2 y}{c^2} = \dfrac{qy}{c} \\ = \dfrac{a^2(\frac{1}{2}c - z)}{c^2} = \dfrac{\frac{1}{2}a^2}{c} - \dfrac{a^2 z}{c^2} \\ = \dfrac{q}{2} - \dfrac{qz}{c} \end{cases}$$

$$an = pn \pm ap \begin{cases} = \dfrac{a^2y}{c^2} \pm (\frac{1}{2}c - y) = \dfrac{qy \pm c(\frac{1}{2}c - y)}{c} \\ = \dfrac{a^2(\frac{1}{2}c - z) + c^2 z}{c^2} = \dfrac{q(\frac{1}{2}c - z) + cz}{c} \end{cases}$$

Mn^2

$$
Mn^2 \text{ d. i. } pM^2+pn^2 \left\{
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{4}a^2c^2 \mp a^2y^2}{c^2} + \frac{a^4y^2}{c^4} \\
&= \frac{a^2(\frac{1}{4}c^4+[a^2 \mp c^2]y^2)}{c^4} \\
&= \frac{\frac{1}{4}qc^2 \mp qy^2}{c} + \frac{q^2y^2}{c^2} \\
&= \frac{q(\frac{1}{4}c^3+[q \mp c]y^2)}{c^2} \\
&= \frac{a^2(\frac{1}{4}a^2c^2+[a^2-c^2][z^2-cz])}{c^4} \\
&= \frac{q(\frac{1}{4}qc^2+[q-c][z^2-cz])}{c^2}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
Mt^2 = pM^2+pt^2 \left\{
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{4}a^2c^2 \mp a^2y^2}{c^2} + \frac{(\frac{1}{4}c^2 \mp y^2)^2}{y^2} \\
&= \frac{a^2y^2(\frac{1}{4}c^2 \mp y^2)+c^2(\frac{1}{4}c^2 \mp y^2)^2}{c^2y^2} \\
&= \frac{(qy^2+c[\frac{1}{4}c^2 \mp y^2])(\frac{1}{4}c^2 \mp y^2)}{cy^2} \\
&= \frac{a^2z(c-z)}{c^2} + \frac{z^2(c-z)^2}{(\frac{1}{2}c-z)^2} \\
&= \frac{qz(c-z)}{c} + \frac{z^2(c-z)^2}{(\frac{1}{2}c-z)^2}
\end{aligned}
\right.
$$

$ae^2 =$

$$ae^2 = \frac{pM^2 . at^2}{pt^2} \begin{cases} = \dfrac{a^2(\frac{1}{4}c^2 \mp y^2)}{c^2} . \dfrac{(\frac{1}{4}c^2 \mp \frac{1}{2}cy)^2}{y^2} : \\ \qquad \dfrac{(\frac{1}{4}c^2 \mp y^2)^2}{y^2} \\ = \dfrac{a^2(\frac{1}{4}c^2 \mp \frac{1}{2}cy)^2}{c^2(\frac{1}{4}c^2 \mp y^2)} = \dfrac{\frac{1}{4}a^2(\frac{1}{2}c \mp y)^2}{\frac{1}{4}c^2 \mp y^2} \\ = \dfrac{\frac{1}{4}cq(\frac{1}{2}c \mp y)^2}{\frac{1}{4}c^2 \mp y^2}; \end{cases}$$

oder, für die Ellipſe allein

$$ae^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2(\frac{1}{2}c - y)}{\frac{1}{2}c + y} = \frac{\frac{1}{4}a^2 z}{c - z} = \frac{\frac{1}{4}cqz}{c - z};$$

welche Verkürzung bey der Ellipſe, wegen der Differenz der Quadrate $\frac{1}{4}c^2 - y^2$, nicht aber bey der Hyperbel, geſchehen kann.

57. Zuſ. 1. Viele von den hier ausgedruckten Linien haben einerley Geſtalt mit den vorhergefundenen (16-49) gleichnamigen für die Hauptaxe, nur daß die dortigen a, c, p, u, hier mit c, a, q, y, verwechſelt werden. In gewiſſen Fällen iſt das an der Hyperbel nicht, wie hier angenommen worden, $= pn - ap$, ſondern $= pn + ap$; welches aber den algebraiſchen Ausdruck von an nicht ändert. Die Werthe, in denen z vorkommt, gelten nur für die Ellipſe, nicht für die Hyperbel, für welche ſie wenig Nutzen haben, und auch ſehr unbeſtimmt ſind, da ein y in der letztern bald größer bald kleiner iſt als $\frac{1}{2}$ c.

58. Zuſ. 2. Es können hier eben ſo, wie bey den Ausdrücken derſelben Linien für die Hauptaxe geſchehen iſt, die Werthe dieſer Linien für gewiſſe beſtimmte y oder z

gefunden, oder auch dieſe Linien gewiſſen Größen gleich geſetzt und hernach die Werthe für y oder z geſucht werden. Wenn man z. E. wiſſen wollte, wie groß in der Hyperbel (Fig. 11.) für $Ct = \frac{1}{2}c$, die Abſciſſe y wäre, ſo ſetze man Ct oder $\frac{c^2}{4y} = \frac{1}{2}c$, ſo kommt $2cy = c^2$, alſo $y = \frac{1}{2}c$; daß alſo der Punct t hier auf a oder b, die Endpuncte der zweyten Axe fiele, nachdem man die Abſciſſe rechts oder linker Hand von C genommen hätte. In dieſem Falle käme at oder $bt = c$, für die Abſciſſe Cp. Da nun aber $Cp = PM$, ſo findet man auch, was für eine Abſciſſe CP auf der erſten oder Hauptaxe zu dem Puncte M gehört, der auf der zweyten Axe $Cp = \frac{1}{2}c$ macht; denn $\frac{1}{2}c$ in die Hauptgleichung (Alg. 402.) für PM geſetzt, giebt $\frac{1}{4}c^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}$, alſo CP oder $u = \frac{a}{\sqrt{2}}$ Wollte man ſuchen, in welchem Puncte, d. i. bey welcher Abſciſſe zwo Linien gleich groß ſind, z. E. wenn $pt = pn$ ſo ſetze man nur ihre Werthe einander gleich, ſo iſt (56) $\frac{\frac{1}{4}c^2 \mp y^2}{y} = \frac{a^2y}{c^2}$, alſo $(a^2 \pm c^2)$. $y^2 = \frac{c^4}{4}$ und $y = \frac{c^2}{2\sqrt{a^2 \pm c^2}}$; und ſo in andern Fällen, die eben keine Schwürigkeit haben.

Anm. Was bis hieher von Erfindung der Tangenten und anderer damit verbundenen Linien gelehrt worden iſt, bezieht ſich, auſſer (20.21.) nur auf die Kegelſchnitte; und ſo kann man immer aus der Natur und den Eigenſchaften einer gegebenen Linie einen Weg finden, auf welchem ſich die Tan-

Tangenten und übrigen Linien derſelben geometriſch beſtimmen, oder ihrer Länge und Lage nach algebraiſch ausdrücken laſſen. Die bey einzelnen Fällen vorkommenden Schwürigkeiten aber, haben die Mathematiker veranlaßt, auf eine allgemeine Methode zu denken, die ſich auf jede gegebene Linie erſtreckt. Eine ſolche Methode für die **algebraiſchen Linien** hat Carteſius zuerſt gegeben, mit welcher er auch ſo ſehr zufrieden geweſen iſt, daß er ſie ihrer Allgemeinheit wegen, für eine der ſchönſten und nützlichſten Erfindungen gehalten hat, die iemals vor ihm in der Geometrie gemacht worden ſind. Dieſe Methode iſt nachher verſchiedentlich; theils verbeſſert, theils erweitert, theils aber auch durch andere verdunkelt worden. Hieher gehören die Bemühungen eines **Paſcal, Fermat, Sluſius**, des großen **Huygens** und des nicht minder vortrefflichen **Iſaac Barrow's**, deſſen Regel für die Tangenten, mit der **Leibnitziſchen** Differenzialformel dafür, bis auf die Bezeichnung vollkommen übereinkommt. Die Bequemlichkeit der **Leibnitziſchen** Bezeichnung aber, und des dafür erfundenen Calculs, hat die Erfindung der Tangenten, nicht nur an ſich ſehr erleichtert, ſondern auch ſo allgemein gemacht, daß ſich dieſelbe auf **transſcendentiſche Linien** ſowohl, als auf **algebraiſche** erſtreckt, und durch keine Brüche, Irrationalitäten oder andere Hinderniſſe der vorigen Methoden aufgehalten wird. Die allgemeine Vorſchrift, aus der gegebenen Gleichung einer Linie, die Tangente, Subtangente u. ſ. w. zu finden, wird Methodus Tangentium directa genennt. Ihr iſt die Methodus Tangentium inuerſa gerade entgegengeſetzt, welche aus gegebenen Tangenten oder andern damit verwandten Linien, die Natur und Conſtruction der krummen Linie, welcher dieſelben zugehören, finden lehrt. Die letztere iſt eine Erfindung der neuern Meßkünſtler, und wird in der Integralrechnung, ſo wie die erſte in der Differenzialrechnung, am allgemeinſten und vollſtändigſten abgehandelt.

II.

Von den
Quadraturen der Kegelſchnitte
und den
natürlichen oder hyperboliſchen Logarithmen.

60. Erklärung.

Eine krummlinichte ebene Fläche wird diejenige genennt, deren Umfang (perimeter) entweder ganz oder nur zum Theil aus einer oder mehrern krummen Linien oder Bogen beſteht. Die Quadratur dieſer Fläche wird gefunden, wenn man das Verhältniß derſelben zu irgend einer geradlinichten ebenen Figur beſtimmen, oder ihre Fläche in einem angeblichen Quadrate ausdrücken kann. Die Quadratur heißt beſtimmt (definita) wenn man von dieſer Ebene nur einen oder etliche beſtimmte Theile, oder auch, wie bey den Ovalen und andern in ſich ſelbſt zurücklaufenden Linien, die ganze Fläche quadrirt. Die unbeſtimmte Quadratur hingegen (indefinita) fordert den Innhalt eines jeden zwiſchen den Bogen einer krummen Linie und einer oder mehrern, nach Gefallen gezogenen geraden oder andern krummen Linien enthaltenen Raumes. Die Unmöglichkeit der letztern iſt vorlängſt erwieſen.

61. Lehrſ. Abcde ſey ein Bogen einer krummen Linie, der mit ſeinen ſenkrechten Coordinaten AE; Ee; den Raum AEecA begränzt. In denſelben ſchreibe man ſo viel Parallelogrammen DF, CG, BH &c. als man will, deren Höhen Dd, Cc, Bb &c. insgeſamt, über den gleichen Grundlinien ED, DC,

CB

CB &c. auf der Abſciſſe, der Ordinate Ee parallel liegen; und ergänze ſodann die Parallelogrammen Ff, Gg, Hh &c. Wenn man nun die Grundlinien aller Rechtecke ſo verkleinert, daß ihre Höhen, näher als jede angebliche Größe beträgt, an einander rücken, und alſo die Anzahl dieſer Parallelogrammen jede endliche Zahl überſteigt: ſo ſind die letzten Verhältniſſe, in welchen die eingeſchriebene Figur EFdGcHbBE, die umgeſchriebene EefdgchbiAE, und die krummlinichte Figur AbcdeEA gegen einander ſtehen, Verhältniſſe der Gleichheit.

Beweiß. Der ein- und umgeſchriebenen Figuren Unterſchied, iſt die Summe der Parallelogrammen Bi, Hh, Gg, Ff, oder, wegen der gleichen Grundlinien aller, das Parallelogramm EDfe, das mit jenen einerley Grundlinie, und die Summe aller ihrer Höhen zu Seitenlinien hat. Da man nun bey dieſen Rechtecken die Grundlinien ſo klein annehmen darf, als man nur will: ſo kann dadurch auch des Streiſens EDfe Breite ED, ohne Ende vermindert werden, dergeſtalt, daß er endlich kleiner werden kann, als jede gegebene Fläche, wenn nur ſeine Grundlinie oder Breite, nach der Vorausſetzung, unter alle Gränzen verkleinert wird. Alſo werden auf den Fall, wenn dieſes Rechteckes Breite verſchwindet, die ein- und umgeſchriebene geradlinichten, und um ſo mehr die dazwiſchen fallende krummlinichte ebene Figur zuletzt einander gleich.

So läßt ſich auch die Gleichheit dieſer drey Figuren erweiſen, wenn ſchon die unendlich kleinen Grundlinien dieſer Rechtecke einander nicht gleich wären; wie Newton im dritten Lehnſatze ſeiner Princ. Phil. Nat. gezeigt hat. Der hier erwieſene Satz iſt deſſen zweyter Lehnſatz.

62. Zuſ. Das Rechteck EDfe wird das Element der krummlinichten ebenen Fläche AceEA genennt,

und iſt von ihr ein Unendlichkleines der erſten Ordnung. Eben ſo iſt efdF ein Element des unendlich kleinen Rechtecks EDfe, oder ein Unendlichkleines der zweyten Ordnung, welches gegen das erſte Element eben ſo verſchwindet, wie dieſes gegen die ganze Fläche. Kann man nun ein ſolches veränderliches Element allgemein ausdrücken, und die Menge aller auf der Abſciſſe AE neben einander ſtehenden Elemente ſummiren: ſo findet man hierdurch, mit gehöriger Beſtimmung der dabey vorkommenden veränderlichen Größen, den Innhalt der krummlinichten ebenen Fläche AceEA. Hierzu dient die 9te und 11te Aufgabe.

63. Aufg. 9. **Die Summe der Potenzen der von 1 an bis n in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlen zu finden.**

Aufl. Wenn n die Anzahl der zu ſummirenden Glieder, ſn^0 die Summe von ſo viel Einheiten als die Zahl n anzeigt, ſn' die Summe der von 1 bis n auf einander folgenden natürlichen Zahlen, und ſn'', ſn''', ſn^{IV} &c. die Summe der Quadrate, der Würfel, der Biquadrate u. ſ. w. eben derſelben Zahlen bedeutet, ſo iſt alsdenn:

$$\begin{array}{r}
1+2^0+3^0+4^0+5^0+6^0+7^0+8^0+9^0 \ldots\ldots +n^0 = ſn^0 \\
2^0+3^0+4^0+5^0+6^0+7^0+8^0+9^0 \ldots\ldots +n^0 \\
3^0+4^0+5^0+6^0+7^0+8^0+9^0 \ldots\ldots +n^0 \\
4^0+5^0+6^0+7^0+8^0+9^0 \ldots\ldots +n^0 \\
5^0+6^0+7^0+8^0+9^0 \ldots\ldots +n^0 \\
6^0+7^0+8^0+9^0 \ldots\ldots +n^0 \\
7^0+8^0+9^0 \ldots\ldots +n^0 \\
8^0+9^0 \ldots\ldots +n^0 \\
9^0 \ldots\ldots +n^0 \\
* * * * +n^0 \\
+(n-1)^0+n^0 \\
n^0 \\
\hline
1+2^1+3^1+4^1+5^1+6^1+7^1+8^1+9^1 \ldots +(n-1)^1+n^1
\end{array}$$

und

und $1+2^1+3^1+4^1+5^1+6^1+7^1+8^1+9^1 \ldots +(n-1)^1+n^1 = \int n'$

$$2^1+3^1+4^1+5^1+6^1+7^1+8^1+9^1 \;.\;.\;.\;.\;.\; +n^1$$
$$3^1+4^1+5^1+6^1+7^1+8^1+9^1 \;.\;.\;.\;.\;.\; +n^1$$
$$4^1+5^1+6^1+7^1+8^1+9^1 \;.\;.\;.\;.\;.\; +n^1$$
$$5^1+6^1+7^1+8^1+9^1 \;.\;.\;.\;.\;.\; +n^1$$
$$6^1+7^1+8^1+9^1 \;.\;.\;.\;.\;.\; +n^1$$
$$7^1+8^1+9^1 \;.\;.\;.\;.\;.\; +n^1$$
$$8^1+9^1 \;.\;.\;.\;.\;.\; +n^1$$
$$9^1 \;.\;.\;.\;.\;.\; +n^1$$
$$* * * * +n^1$$
$$+(n-1)^1+n^1$$
$$n^1$$

---

und $1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2 \ldots +(n-1)^2+n^2 = \int n''$

$$2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; +n^2$$
$$3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; +n^2$$
$$4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; +n^2$$
$$5^2+6^2+7^2+8^2+9^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; +n^2$$
$$6^2+7^2+8^2+9^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; +n^2$$
$$7^2+8^2+9^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; +n^2$$
$$8^2+9^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; +n^2$$
$$9^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; +n^2$$
$$* * * * +n^2$$
$$+(n-1)^2+n^2$$
$$n^2$$

---

und $1+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3 \ldots +(n-1)^3+n^3 = \int n'''$

&c. &c. &c. &c.

Vermittelſt dieſer Zahlreihen werden die höhern Potenzen der natürlichen Zahlen durchgängig aus den vorhergehenden niedrigern gefolgert, welches ſehr bequem

iſt, die Summe der verlangten Potenzen daraus herzuleiten.

Daß $1+2^\circ+3^\circ+4^\circ+5^\circ \ldots +n^\circ = \int n^\circ = n$, iſt an und für ſich klar. Hieraus aber läßt ſich nun $\int n'$, und aus dieſem und dem erſten, $\int n''$, und ſo ferner $\int n'''$, $\int n^{IV}$ &c. auf folgende Art finden:

Man nehme noch einmal die erſte Zahlenreihe vor, und füge derſelben der Horizontalreihen Ergänzungen $= S^\circ$, unter dem Striche mit bey. Wenn alſo:

$$1+2^\circ+3^\circ+4^\circ+5^\circ+6^\circ \ldots + n^\circ = \int n^\circ = n$$
$$1+2^\circ+3^\circ+4^\circ+5^\circ+6^\circ \ldots + n^\circ$$
$$1+2^\circ+3^\circ+4^\circ+5^\circ+6^\circ \ldots + n^\circ$$
$$1+2^\circ+3^\circ+4^\circ+5^\circ+6^\circ \ldots + n^\circ$$
$$1+2^\circ+3^\circ+4^\circ+5^\circ+6^\circ \ldots + n^\circ$$
$$1+2^\circ+3^\circ+4^\circ+5^\circ+6^\circ \ldots + n^\circ$$
$$\ast \quad \ast \quad \ast \quad \ast \quad \ast \quad \ast \quad \ast \quad \ast + n^\circ$$
$$\ast \quad \ast \quad \ast \quad \ast \quad \ast \quad \ast + (n-1)^\circ + n^\circ$$

ſo iſt $S^\circ + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \ldots + (n-1) + n = S^\circ + \int n'$

Da es nun allemal ſo viel Horizontalreihen giebt, als n Einheiten hat, ſo iſt $n. \int n^\circ$ oder $n^2 = S^\circ + \int n'$, alſo $\int n'$ gegeben, wenn man S° ausdrücken kann. Nun iſt aber die Summe aller Glieder unter dem Striche, oder $S^\circ = 1+(1+2^\circ)+(1+2^\circ+3^\circ)\ldots+(1+2^\circ+3^\circ+4^\circ+5^\circ \ldots \ldots +[n-1]^\circ) = 1+2+3+4+5+6\ldots+(n-1) = \int n' - n$; alſo $n^2 = \int n' - n + \int n'$, oder $2\int n' = n^2 + n$ und

$\int n' =$

$\text{ſ}n' = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = (n+1).\frac{1}{2}n$, der Summe des erſten und letzten Gliedes in die halbe Anzahl der Glieder (Alg. 85.) In der folgenden Reihe iſt auf eben die Art, mit den unter dem Striche beygefügten Ergänzungen $= S'$;

$$1+2+3+4+5+6\ldots\ldots+n = \text{ſ}n' = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2},$$
$$1+2+3+4+5+6\ldots\ldots+n$$
$$1+2+3+4+5+6\ldots\ldots+n$$
$$1+2+3+4+5+6\ldots\ldots+n$$
$$1+2+3+4+5+6\ldots\ldots+n$$
$$1+2+3+4+5+6\ldots\ldots+n$$
$$*\quad *\quad *\quad *\quad *\quad *\quad *\quad *+n$$
$$*\quad *\quad *\quad *\quad *\quad *\quad +(n-1)\quad +n$$

und $S'+1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\ldots+(n-1)^2+n^2 = S'+\text{ſ}n''$,

alſo $n.\text{ſ}n' = \text{ſ}n'' + S'$, und $S' = 1+(1+2)+(1+2+3)\ldots + (1+2+3+4+5\ldots+[n-1])$ d. i. wenn man die einzelnen Ergänzungen der auf einander folgenden Horizontalreihen, als ſo viele Reihen betrachtet, die man einzeln ſummirt, (wo man alſo in dem Werthe von $\text{ſ}n' = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$; das n nach und nach $= 1$; $= 2$; ... $= n-1$ ſetzen muß,) $S' = (\frac{1^2}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{2^2}{2} + \frac{2}{2}) + (\frac{3^2}{2} + \frac{3}{2}) \ldots\ldots + (\frac{[n-1]^2}{2} + \frac{n-1}{2})$

$$= \frac{1^2+2^2+3^2+4^2\ldots+[n-1]^2}{2} +$$

$$\frac{1+2+3+4\ldots+(n-1)}{2} = \frac{ſn''-n^2}{2} + \frac{ſn'-n}{2},$$

alſo $n.ſn'$ oder $ſn''+S' = ſn''+\frac{ſn''-n^2}{2}+\frac{ſn'-n}{2}$,

oder $ſn'' = \frac{2.nſn'+n^2-\frac{2}{2}(ſn'-n)}{2+1} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$ nach dem aus dem vorhergehenden für $ſn'$ gefundenen und hier ſubſtituirten Werthe.

Eben ſo wäre $n.ſn'' = ſn'''+S''$, und $S'' = 1^2 + (1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)\ldots+(1^2+2^2+3^2\ldots+[n-1]^2) = \left(\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+\frac{2}{6}\right)$ $+\left(\frac{3^3}{3}+\frac{3^2}{2}+\frac{3}{6}\right)\ldots+\left(\frac{[n-1]^3}{3}+\frac{[n-1]^2}{2}+\frac{n-1}{6}\right)$ $= \frac{1^3+2^3+3^3\ldots+[n-1]^3}{3}+\frac{1^2+2^2+3^2\ldots+(n-1)^2}{2}$ $+\frac{1+2+3\ldots+[n-1]}{6} = \frac{ſn'''-n^3}{3}+\frac{ſn''-n^2}{2}$ $+\frac{ſn'-n}{6}$; alſo, wenn man die Diviſoren der einzelnen Glieder der jedesmaligen vorhergehenden Potenz [hier 3, 2, 6] nun α, β, γ &c. ſetzt:

$nſn'$

$$n\int n'' \text{ oder } \int n''' + S'' = \int n''' + \frac{\int n''' - n^3}{\alpha} + \frac{\int n'' - n^2}{\beta}$$

$$+ \frac{\int n' - n}{\gamma} \text{ oder}$$

$$\int n''' = \frac{\alpha . n\int n'' + n^3 - \frac{\alpha}{\beta}(\int n'' - n^2) - \frac{\alpha}{\gamma}(\int n' - n)}{\alpha + 1} =$$

$$= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \tfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \text{ wenn man}$$

die vorhergefundenen Werthe von $\int n''$ und $\int n'$ ſubſtituirt.

64. Zuſ. 1. Um das hieraus fließende Geſetz für die höhern Potenzen aus den vorhergehenden, deſto leichter überſehen zu können, will ich hier die Ausdrückungen der erſtern auf einander folgenden Potenzreihen neben einander ſetzen. Es iſt demnach

$\int n^\circ = n$, oder $\frac{n}{1}$; Hieraus folgt:

$$n\int n^\circ = \int n' + S^\circ = \int n' + \frac{\int n' - n}{\alpha}; \text{ oder}$$

$$\int n' = \frac{\alpha . n\int n^\circ + n}{\alpha + 1} = \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} = (n+1).\tfrac{1}{2} n \text{ folglich,}$$

$$n\int n' = \int n'' + S' = \int n'' + \frac{\int n'' - n^2}{\alpha} + \frac{\int n' - n}{\beta} \text{ und}$$

$$\int n'' = \frac{\alpha . n\int n' + n^2 - \frac{\alpha}{\beta}(\int n' - n)}{\alpha + 1}$$

=

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \text{ alſo}$$

$$nſn'' = ſn''' + S'' = ſn''' + \frac{ſn''' - n^3}{\alpha}$$

$$+ \frac{ſn'' - n^2}{\beta} + \frac{ſn' - n}{\gamma} \text{; und}$$

$$ſn''' = \frac{\alpha . nſn'' + n^3 - \frac{\alpha}{\beta}(ſn'' - n^2) - \frac{\alpha}{\gamma}(ſn' - n)}{\alpha + 1}$$

$$= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{4}(n+1)^2\text{; alſo}$$

$$nſn''' = ſn^{IV} + S''' = ſn^{IV} + \frac{ſn^{IV} - n^4}{\alpha} + \frac{ſn''' - n^3}{\beta}$$

$$+ \frac{ſn'' - n^2}{\gamma} \text{; und}$$

$$ſn^{IV} = \frac{\alpha . nſn''' + n^4 - \frac{\alpha}{\beta}(ſn''' - n^3) - \frac{\alpha}{\gamma}(ſn'' - n^2)}{\alpha + 1}$$

$$= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

Hieraus folgt ferner:

$$ſn^{V} = nſn^{IV} - S^{IV} = \frac{\alpha . nſn^{IV} + n^5 - \frac{\alpha}{\beta}(ſn^{IV} - n^4)}{\alpha + 1}$$

—

$$\frac{-\frac{\alpha}{\gamma}(\mathfrak{f}n''' - n^3) + \frac{\alpha}{\delta}(\mathfrak{f}n' - n)}{\alpha + 1} = \frac{n^6}{6}$$

$$+ \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}; \text{ und}$$

$$\mathfrak{f}n^{vi} = n\mathfrak{f}n^v - S^v = \frac{\alpha . n\mathfrak{f}n^v + n^6 - \frac{\alpha}{\beta}(\mathfrak{f}n^v - n^5)}{\alpha + 1}$$

$$\frac{-\frac{5\alpha}{\gamma}(\mathfrak{f}n^{iv} - n^4) + \frac{\alpha}{\delta}(\mathfrak{f}n'' - n^2)}{\alpha + 1}$$

$$= \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}; \text{ u. ſ. w.}$$

wobey man die Bedeutung der griechiſchen Buchſtaben nicht aus der Acht laſſen muß, die ſich für jede Potenzſumme auf die Diviſoren der einzelnen Glieder in dem Werthe der nächſtvorhergehenden Potenzſumme, in ihrer Ordnung beziehen, und folglich nicht immer einerley bleiben, ſo daß für $\mathfrak{f}n^{vii}$ die Buchſtaben α, β, γ, δ, ε, den Zahlen 7, 2, 2, 6, 42 aus $\mathfrak{f}n^{vi}$ gleich ſeyn würden. Auch iſt offenbar, daß in den Gliedern, welche die Summe einer gegebenen Potenzreihe ausdrücken, der höchſte Exponent von n durchgehends einen Grad höher iſt, als die Potenzen ſteigen, die man ſummiren ſoll. Der Diviſor der höchſten Potenz von n iſt gleichfalls dieſem Exponenten gleich; alſo $\mathfrak{f}n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} \ldots$ auch iſt der Diviſor des nächſtfolgenden zweyten Gliedes immer die Zahl 2.

65. Zuſ. 2. Wäre alſo die Summe von n Gliedern der mten Potenzen, oder

$$\int n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} - \frac{An^q}{\beta} + \frac{Bn^r}{\gamma} - \frac{Cn^s}{\delta} + \frac{Dn^t}{\varepsilon} \ldots \mp \&c.$$

gefunden worden, wo A, B, C, D... die Coefficienten der einzelnen Glieder vorſtellen mögen, ſo wäre alsdenn die Summe der nächſthöhern Potenzreihe, oder:

$$\int n^{m+1} = \frac{\alpha . n \int n^{\alpha - 1} + n^{\alpha} + \frac{A\alpha}{\beta}(\int n^q - n^q)}{\alpha + 1}$$

$$\frac{- \frac{B\alpha}{\gamma}(\int n^r - n^r) + \frac{C\alpha}{\delta}(\int n^s - n^s)}{\alpha + 1}$$

$$\frac{- \frac{D\alpha}{\varepsilon}(\int n^t - n^t) \ldots \pm \&c.}{\alpha + 1}$$

wo das Geſetz der einzelnen Glieder ſowohl als der Zeichen von ſelbſt in die Augen fällt. Der Kürze wegen iſt in dem Werthe von $\int n^{m+1}$ hier α ſtatt $m+1$ geſetzt worden.

66. Zuſ. 3. In dem Werthe von $\int n^m$ ſey $m+1$ der höchſte Exponent von n, (64.) ſo fallen, für $n = \infty$, alle folgende Glieder weg, alſo iſt $\int n^m = \frac{n^{m+1}}{\alpha} = \frac{n^{m+1}}{m+1}$; und $\int n^{m+1} = \frac{\alpha . n \int n^m}{\alpha + 1} = \frac{(m+1) n \int n^m}{m+2} = \frac{n^{m+2}}{m+2}$; ſo daß auch hier die folgenden Glieder, in denen blos die

Exponenten $m+1$; q; r; s; t vorkommen, wegfallen; Für $m=0$; iſt $m+1=1$ alſo $\int n^{0+1}$ oder $\int n' = \frac{n^2}{2}$; (64) und da bey jeder der folgenden Potenzen der höchſte Exponent, ſo wie der Diviſor des zugehörigen Gliedes, um 1 wachſen, (64) ſo kommt $\int n'' = \frac{n^3}{3}$; $\int n''' = \frac{n^4}{4}$; $\int n^{IV} = \frac{n^5}{5} \ldots$ alſo $\int n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1}$; wie vorhin. Hieraus fließt folgende Regel: Die Summe der Potenzen m derer in unendlicher Anzahl, von 1 an in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlen, iſt gleich dem durch $m+1$ dividirten Producte aus dem letzten Gliede der Reihe, in die Anzahl aller Glieder. So iſt $1+2^m +3^m+4^m \ldots + y^m = \frac{y^m . y}{m+1} = \frac{y^{m+1}}{m+1}$; und

$$1+2^m+3^m+4^m \ldots + \left(\frac{x}{e}\right)^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\, e^{m+1}};$$

voraus geſetzt, daß y ſo wie $\frac{x}{e}$ in Abſicht der Einheit [1] unendlich ſind.

67. Zuſ. 4. In dem Beweiſe des Satzes (63) iſt angenommen worden, daß m eine ganze poſitive Zahl ſey. Er gilt aber auch, wenn m eine gebrochene oder auch negative, ganze oder gebrochene Zahl iſt; aber der Beweiß davon, wenn man ihn ohne Beyhülfe der Differenzialrechnung führen will, läßt ſich ohne viele Weitläuftigkeit hier nicht überzeugend geben. Dieſe Erinnerung iſt um ſo nöthiger, weil in der Folge auch Summirungen ſolcher Reihen vorkommen werden. Für

$1+2^{-m}$

$1+2^{-m}+3^{-m}+4^{-m}\ldots+y^{-m}$ wäre alſo für dieſe unendliche Anzahl von Gliedern die Summe $=\frac{y^{-m+1}}{-m+1}$; oder, wenn $-m=-\frac{r}{s}$ wäre: $1+2^{-\frac{r}{s}}+3^{-\frac{r}{s}}+4^{-\frac{r}{s}}\ldots+y^{-\frac{r}{s}}=\frac{y^{-\frac{r}{s}+1}}{-\frac{r}{s}+1}=\frac{y^{\frac{s-r}{s}}}{\frac{s-r}{s}}=\frac{sy^{\frac{s-r}{s}}}{s-r}$.

Auf eben die Art verfährt man, wenn m eine poſitive gebrochene Zahl iſt. Der beſondere Fall, wenn $m=-1$ [87. Expl. 3.] für die Reihe $1+2^{-1}\ldots+y^{-1}$ wird, ſoll in der Folge (118.) entſchieden werden.

68. Anm. 1. Dieſe Summen der Potenzreihen ſind im Grunde nichts anders, als das Integral des letzten Gliedes der gegebenen Reihe, weil nach der ſo bekannten Integrationsformel für die Wurzeln und Potenzen $\int(z^m dz)=\frac{z^{m+1}dz}{(m+1)dz}=\frac{1}{m+1}z^{m+1}=\frac{z^{m+1}}{m+1}$ $=1+2^m+3^m+4^m\ldots+z^m$ (66)

69. Anm. 2. Der (63) erwieſene Satz läßt ſich mit vieler Leichtigkeit und Bequemlichkeit auf die Polygonal- und Pyramidalzahlen anwenden, von welchen jene auf eben die Art aus den arithmetiſchen, wie dieſe aus den Polygonalprogreßionen ſummirt werden, wie aus folgenden zu erſehen iſt.

70. Aufg. 10. Einen allgemeinen Ausdruck für die Polygonal- und Pyramidalzahlen zu finden.

Aufl.

Aufl. Man ſetze

$$\begin{array}{r}
1 + d + d + d \ldots\ldots + d = A \\
1 + d + d \ldots\ldots + d \\
1 + d \ldots\ldots + d \\
1 \ldots\ldots + d \\
* \; * \; * + d \\
1
\end{array}$$

und
$$\begin{array}{r}
1 + (1+d) + (1+2d) + (1+3d) \ldots + (1+[n-1]d) = B \\
1 + (1+d) + (1+2d) \ldots + (1+[n-2]d) \\
1 + (1+d) \ldots + (1+[n-3]d) \\
1 \ldots + (1+[n-4]d) \\
* \; * \; * \; * \; * \\
1
\end{array}$$

und $1 + (2+d) + (3+3d) + (4+6d) \ldots + \frac{n}{2}(2+[n-1]d)$ (Alg. 85)

oder
$$\begin{array}{r}
1 + (2+d) + (3+3d) + (4+6d) \ldots + n + \frac{(n^2-n)}{2} d = C \\
1 + (2+d) + (3+3d) \ldots + (n-1) + \frac{(n-1)^2-(n-1)}{2} d \\
1 + (2+d) \ldots + (n-2) + \frac{(n-2)^2-(n-2)}{2} d \\
1 \ldots + (n-3) + \frac{(n-3)^2-(n-3)}{2} d \\
* \; * \; * \; * \; * \; * \\
1 + \frac{(1^2-1)}{2} d
\end{array}$$

und $1 + (3+d) + (6+4d) + (10+10d) \ldots + \int n' + \frac{(\int n'' - \int n')}{2} d$

oder $1 + (3+d) + (6+4d) + (10+10d) \ldots + \frac{n^2+n}{2} + \frac{n^3-n}{6} d = D$

wo man das allgemeine Glied in D auch durch $\frac{n}{2}\left([n+1]+\frac{[n^2-1]}{3}d\right)$ oder $\frac{n.n+1}{2.3}(3+[n-1]d)$ ausdrücken kann.

Hier nun beſteht A, ſo wie B, C, D u. ſ. w. aus n Gliedern. B iſt die allgemeine, aus dem Stammgliede 1 und der Differenz d entſtandene, arithmetiſche Progreßion, und $1+(n-1)d$ ihr ntes Glied, und die Summe von A. Ferner iſt C die allgemeine Polygonalprogreßion, und das nte Glied derſelben, oder $n+\frac{(n^2-n)}{2}d$ zugleich die Summe der vorhergehenden arithmetiſchen Progreßion B. Endlich iſt D die allgemeine Pyramidalprogreßion, von welcher das nte Glied, $\frac{n^2+n}{2}+\frac{n^3-n}{6}d$, zugleich die Summe der vorhergehenden Polygonalprogreßion C iſt. Die Summe der allgemeinen Pyramidalprogreßion D findet man, wenn man in den Werth des letztgenannten nten Gliedes ſtatt n nach und nach 1, 2, 3 ... n ſubſtituirt. Dieſes giebt

$$D=\frac{\int n''+\int n'}{2}+\frac{\int n'''-\int n'}{6}d=\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}$$

$$+\frac{n}{3}+\left(\frac{n^4}{24}+\frac{n^3}{12}-\frac{n^2}{24}-\frac{n}{12}\right)d=\frac{n}{6}\times$$

$$\left([n+1]\ [n+2]+[n^2-1]\ \left[\frac{n}{4}+\tfrac{1}{2}\right]d\right)=$$

$$\frac{n.\,n+1.\,n+2}{2.\ 3.\ 4}(4+[n-1]d)$$

71. Zuſ.

71. Zuſ. 1. Wenn alſo
das allgemeine Glied von $A = d$, ſo iſt alsdenn:

. . . . $B = 1 + [n - 1] d$ zugleich die Summe von A; und

. . . . $C = \frac{n}{2} (2 + [n - 1] d)$ z. d. S. von B; und

. . . . $D = \frac{n . n+1}{2 . 3} (3 + [n - 1] d)$ z. d. S. von C; und

. . . . $E = \frac{n . n+1 . n+2}{2 . 3 . 4} (4 + [n - 1] d)$ z. d. S. von D

Ueberhaupt wenn X, Ψ, Ω, drey unbeſtimmte auf einander folgende Reihen, wie C, D, E bedeuten, ſo iſt, wenn das allgemeine Glied

$$\text{von } \Psi = \frac{n . n+1 .. (n+m)}{2 . 3 ... (m+2)} ([m+2] + [n - 1] d)$$ zugleich die Summe von X iſt, alsdenn das allgemeine Glied

$$\text{von } \Omega = \frac{n . n+1 ... [n+m] [n+m+1]}{2 . 3 ... [m+2] [m+3]} ([m+3] + [n - 1] d)$$

zugleich die Summe von Ψ.

72. Zuſ. 2. Die beſondre Beſtimmung der Polygonal- und Pyramidalzahlen hängt von der Größe von d ab. Man ſetze in den vorhergehenden Formeln, d nach und nach $= 1, 2, 3$ &c. ſo giebt $\frac{n}{2} (2 + (n - 1) d)$ die nte oder allgemeine Trigonal- oder Tetragonal- oder Pentagonal ꝛc. Polygonalzahl; und eben ſo

$\frac{n.\overline{n+1}}{2.3}(3+[n-1]d)$ die allgemeine Trigonal⸗Te⸗tragonal⸗Pentagonal⸗ꝛc. Pyramidalzahl von dem erſten Geſchlechte; und $\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{2.3.4}(4+[n-1]d)$ eben dergleichen Pyramidalzahlen von dem zweyten Geſchlechte; alſo $\frac{n.\overline{n+1}\ldots(n+m)}{2.3\ldots(m+2)}([m+2]+[n-1]d)$ die genannten Pyramidalzahlen von dem mten Ge⸗ſchlechte. Die Polygonalzahlen mit dem *Centro*, in⸗gleichen die abgekürzten Polygonal⸗oder Pyramidal⸗zahlen zu finden, hat keine Schwürigkeit, und es würde unnöthig ſeyn, wenn ich mich länger dabey aufhalten wollte, da in der Folge wenig Gebrauch von dieſen Zahlen gemacht wird, und ich ihrer nur bey Gelegenheit der Potenzreihen gedacht habe, mit denen ſie einen ähnlichen Urſprung haben. Wenn man in den Formeln (71) durch⸗gängig $d=1$ ſetzt: ſo findet man aus ihnen die figurirten Zahlen der Käſtn. Tafel (Alg. 726.) Man ſehe 109. 4.

73. Aufg. 11. **Eine allgemeine Formel für das Element (62) jeder gegebenen Fläche AEeA (Fig. 12.) zu finden, aus welcher man die Fläche quadriren kann.**

Aufl.

1) für rechtwinklichte Coordinaten. Man ſtelle ſich die Abſciſſe $AE=x$ in unendlich viele, alſo unend⸗lich kleine gleiche Theile $AB=BC=CD$ &c. getheilt vor, ſo iſt, für $AB=e$; alsdenn $AC=2e$, $AD=3e$ &c. alſo $AE=\frac{x}{e}.e$, weil ſolcher unendlich kleinen Theilchen ſo viel in der Abſciſſe (x) befindlich ſind, als die ange⸗nommene Einheit e in ihr enthalten iſt. Nun ſey y die allgemeine ſenkrechte Ordinate über jedes e, ſo iſt ey, das

verlangte Flächen-Element, $= e\,X$, wo X als eine ſolche Function von x betrachtet wird, die den Werth von y, aus der Gleichung der zu quadrirenden krummen Linie, in x und beſtändigen Größen ausdrückt. In dieſe Function von x ſetze man alsdenn ſtatt x nach und nach e; $2e$; $3e \ldots \frac{x}{e}.e$, ſo erhält man hierdurch die ganze Reihe der in unendlicher Anzahl über der Abſciſſe AE nächſt auf einander folgenden $y = X$, deren Summe nach (66) genommen, und in die unendlich kleine Baſin e multiplicirt, die veränderliche krummlinichte Fläche aus dieſen Elementen, in einem veränderlichen Ausdrucke giebt, aus welchem man die gegebene Fläche, durch gehörige Subſtitution der veränderlichen Größe findet. Oft iſt dieſer Ausdruck rational; noch öfterer irrational, oder giebt den geſuchten Flächen-Innhalt in einer Reihe, die man nicht vollſtändig ſummiren kann.

2) für ſchiefwinklichte Coordinaten (Fig. 13) ſey $AP = x$; $PM = y$; der Coordinatenwinkel $APM = \pi$. Wenn $Pp = e$ ein Element der Abſciſſe AP iſt, ſo iſt PMmp ein Element der Fläche AMP. Man ziehe $M\Pi$, $m\pi$ ſenkrecht auf AP, ſo iſt $PMmp = \Pi Mm\pi = e.\Pi M$; und weil $r : \text{ſin.}\,\pi = PM\,(y) : \Pi M = \frac{y\,\text{ſin.}\,\pi}{r}$, ſo iſt $e.\Pi M = ey\,\frac{\text{ſin.}\,\pi}{r} = PMmp$; dem Elemente der Fläche APM; $= eX.\,\frac{\text{ſin.}\,\pi}{r}$ oder $e\,X.\,\text{ſin.}\,\pi$, für $r = 1$. Wird alſo der Coordinatenwinkel ein rechter, ſo iſt auch $\text{ſin.}\,\pi = 1$ und $e.PM$ oder $PMmp = ey = eX$, wie vorhin.

74. Zuſ. Die Summe alſo aller eX in den Sinus des Coordinatenwinkels multiplicirt, giebt den geſuchten Ausdruck der veränderlichen Fläche APM; wo e das Element der Abſciſſe x bezeichnet. Die zu nehmende Summe der über x neben einander liegenden Flächen-Elemente ey, werde ich im Folgenden durch ſ(ey) anzeigen, welche Bezeichnung mit denen (63—66) gebrauchten, ähnlich, und durch den ganzen Integralcalculus bereits eingeführt und gewöhnlich iſt.

75. Aufg. 12. Die Quadratur eines gegebenen geradlinichten rechtwinklichten Dreyecks ABC (Fig. 14) zu finden.

Aufl. Es ſey BC = a; AB = b; AP = x; und PM = y mit BC parallel, ſo iſt b: a = x: y, alſo

$y = \frac{ax}{b} = X$ (73. 1) die Gleichung für die Linie AM

zwiſchen den rechtwinklichten Coordinaten AP, PM. Wenn mp dem MP unendlich nahe, ſo iſt Pp = e, dem Elemente der Abſciſſe x; alſo ey = PpmM, dem Elemente des veränderlichen Flächenraumes APM.

Weil nun $ey = eX = \frac{eax}{b}$, ſo iſt die Summe aller

über der Abſciſſe AP neben einanderſtehenden Flächen-

Elemente, oder $ſ(ey) = e.\frac{ae}{b} + e.\frac{a.2e}{b} + e.\frac{a.3e}{b}$

$+ e.\frac{a.4e}{b} \ldots + e.\frac{a.\frac{x}{e}.e}{b}\Big)[73.1] = \frac{e^2a}{b}\Big(1+2+3$

$+4\ldots+\frac{x}{e}\Big) = \frac{e^2a}{b}.\frac{x^2}{2e^2}\,(66) = \frac{ax^2}{2b}.$

Für

Für $x = b$, wird $\triangle APM = \triangle ABC = \frac{ab^2}{2b} = \frac{1}{2}ab$, wie bekannt.

76. Zuſ. Für einen ſchiefwinklichten Triangel ABC, (Fig. 15.) ſey $CD = c$, das übrige wie vorhin, ſo iſt $\triangle APM = \frac{ax^2}{2b}$. ſin. CBD (74) $= \frac{ax^2}{2b} \cdot \frac{CD}{CB} = \frac{ax^2}{2b} \cdot \frac{c}{a}$ Und ſo findet man, für $x = b$, $\triangle ABC = \frac{ab^2}{2b} \cdot \frac{c}{a} = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}AB.\ CD$, der halben Baſi in das Perpendikel.

77. Aufg. 13. Den paraboliſchen Raum ApMA (Fig. 16.) zu quadriren.

Aufl. Wenn A, der Scheitel der Parabel, der Anfang der Abſciſſen, und $Ap = x$; $pM = y$ und p der Parameter iſt, ſo iſt $y = \frac{x^2}{p}$, die Gleichung für rechtswinklichte Coordinaten an der äußern Parabel, alſo $ey = \frac{e}{p} . x^2$ und $\int(ey)$ oder $ApMA = \frac{e}{p} . e^2 + \frac{e}{p} 4e^2 + \frac{e}{p} . 9e^2 \ldots . + \frac{e}{p} . \left(\frac{x}{e}\right)^2 . e^2$ [73. 1] $= \frac{e^3}{p} . (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \ldots + (\frac{x}{e})^2) = \frac{e^3}{p} . \frac{x^3}{3e^3}$ (66) $= \frac{x^3}{3p} = \frac{x^2 . x}{3p} = \frac{py . x}{3p} = \frac{1}{3}xy$, oder: Ein Drittheil des rechtwinklichten Parallelogramms ApMP unter den Coordinaten x, y.

78. Zuſ. 1. Für ſchiefwinklichte Coordinaten $A\pi = \omega$; $\pi M = z$; wäre $A\pi MA = \frac{1}{3}\omega z.$ ſin. $M\pi p$, (74) oder: Ein Drittheil des ſchiefwinklichten Parallelogramms unter den Coordinaten ω, z; Nun iſt aber $\frac{1}{3}\omega z.$ ſin. $M\pi p = \frac{1}{3}\omega z. \frac{Mp}{M\pi} = \frac{1}{3}\omega z. \frac{y}{z}$, alſo $A\pi MA = \frac{1}{3}\omega y$, oder: Ein Drittheil des Rechtecks unter der Abſciſſe ω und der ſenkrechten zu Ap gehörigen Ordinate Mp, alſo $\frac{1}{3} A\pi. Mp$.

79. Zuſ. 2. In der Aufgabe (77) fällt in dem Ausdrucke für den quadrirten Raum, e^3, ſo wie in der vorhergehenden Aufgabe (75) e^2, ganz heraus. Wenn alſo für eine gegebene Linie $y = Ax^m$, alſo $ey = e. Ax^m$, ſo laſſen ſich alle Quadraturen von der Art, oder $\int (ey)$ d. i. $\int (e. Ax^m)$ allgemein unter der Formel $e^{m+1} A (1 + 2^m + 3^m + 4^m \ldots + \frac{x^m}{e^m}) = \frac{e^{m+1} A x^{m+1}}{(m+1) e^{m+1}} = \frac{A x^{m+1}}{m+1}$ vorſtellen, wo m den Exponenten der Abſciſſe x bedeutet. Da nun $A. \frac{x^{m+1}}{m+1}$ ein Product des Coefficienten von x^m in die unendliche Reihe $(1 + 2^m + 3^m + 4^m \ldots + x^m) = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, und dieſes Product nichts anders als die Summe aller Ordinaten iſt: ſo erhellet hieraus, daß mit dieſer Summe zugleich der Ausdruck der veränderlichen Fläche gegeben iſt; welches eben ſo viel iſt, als ob man in den vorigen Ausdrücken $e = 1$ ſetzte. Die Richtigkeit dieſes Verfahrens läßt ſich auch folgendergeſtalt erweiſen. Die eingeſchriebenen Rectangel (61) verhalten ſich, bey ihren gleichgroßen Grundlinien, wie ihre Höhen; alſo ihre

ihre Summen, wie die Summen dieſer Höhen. Sind nun dieſe Grundlinien unendlich klein, ſo iſt die Summe von allen Rectangeln zugleich der gegebenen Fläche, (61) ſo wie die Summe aller Höhen, der Summe aller Ordinaten gleich, und die Verhältniß dieſer unendlich kleinen Rectangel noch immer dieſelbe; Folglich auch die gegebene Fläche wie die Summe dieſer Höhen, d. i. nach der Vorausſetzung, wie die Summe aller Ordinaten. Wenn alſo die unendlich kleinen Rechtecke nach der Ordnung a, b, c, d ꝛc. die zugehörigen Höhen oder Ordinaten α, β, γ, δ ꝛc. die unendlich kleinen Grundlinien $= e$ ſind: ſo iſt $a : b = \alpha : \beta$; oder $(a+b+c) : d = (\alpha+\beta+\gamma) : \delta$ u. ſ. w. und $a+b+c+d$ ꝛc. $= e(\alpha+\beta+\gamma+\delta$ ꝛc.$)$ alſo $(a+b+c+d$ ꝛc.$) : (\alpha+\beta+\gamma+\delta$ ꝛc.$) = e : 1 = 1 : 1$, wenn man e für die Einheit annimmt. Alſo iſt $a+b+c+d$ ꝛc. $= \alpha+\beta+\gamma+\delta$ ꝛc. oder, die Summe aller Rectangel der Summe aller Ordinaten gleich: wenn man alſo dieſe gefunden hat, ſo hat man auch die ganze Fläche. Wäre nun die allgemeine Ordinate, oder $y = Ax^m - Bx^n + Cx^r - Dx^s \ldots \pm$ &c., ſo wäre die Summe von allen über der Abſciſſe x, nächſt an einander ſtehenden Ordinaten $= \frac{Ax^{m+1}}{m+1} - \frac{Bx^{n+1}}{n+1} + \frac{Cx^{r+1}}{r+1} - \frac{Dx^{s+1}}{s+1} \ldots \pm$ &c. $= \int(ey)$ dem Ausdrucke der veränderlichen Fläche, aus welchem man die gegebene durch Subſtitution findet.

80. Aufg. 14. Den paraboliſchen Raum APMA, zwiſchen dem Bogen AM und den rechtwinklichten Coordinaten AP, PM, zu quadriren.

Aufl. Weil $xy = ApM + APM = \frac{1}{3}xy + APM$ (77) ſo iſt $APM = xy - \frac{1}{3}xy = \frac{2}{3}xy$. Dieſen Werth

von APMA fände man auch, unabhängig von ApM ſolgendergeſtalt. Durch Verwandlung der Coordinaten (77) kommt für AP = x; PM = y; die Gleichung $y^2 = px$ für die Axe der Parabel. Hier iſt $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = X$, alſo das m in (66. 67.) hier $= \frac{1}{2}$, und ſ(ey) oder

$$ſ(eX) = p^{\frac{1}{2}} (1 + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + 4^{\frac{1}{2}} \ldots + x^{\frac{1}{2}}) \quad (79)$$

$$= p^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \ (67) = \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3} xy,$$

wie vorhin, wodurch alſo (67) in Abſicht auf gebrochene poſitive Exponenten durch ein Exempel beſtätiget wird.

81. Zuſ. 1. Für ſchiefwinklichte Coordinaten $A\pi = \omega$; $\pi M = z$, wäre $A\pi M = \frac{2}{3}\omega z$. ſin. $M\pi P$ (74)

$$= \frac{2}{3}\omega z. \frac{MP}{M\pi} = \frac{2}{3}\omega z. \frac{y}{z} = \frac{2}{3}\omega y = \frac{2}{3} A\pi . PM.$$

82. Zuſ. 2. Man ziehe die gerade Linie AM, ſo iſt das paraboliſche Segment AKMA = AKMP — △AMP = $\frac{2}{3}xy - \frac{1}{2}xy = \frac{1}{6}xy$. Alſo verhalten ſich AKMA; AKMp; △AMP; AKMP; gegen einander, wie $\frac{1}{6}xy$; $\frac{1}{3}xy$; $\frac{1}{2}xy$; $\frac{2}{3}xy$; das iſt, wie die Zahlen 1; 2; 3; 4.

83. Zuſ. 3. Für ein PM aus dem Brennpuncte F, wäre $x = \frac{1}{4}p$; $y = \frac{1}{2}p$ (Alg. 358. 359) alſo, auf den Fall, $\frac{2}{3}xy = \frac{1}{12}p^2$, dem zwölften Theile des Quadrates des Parameters gleich.

84. Zuſ. 4. Das paraboliſche Segment PMNQ = AKNQ — AKMP zu quadriren, ſetze man AP = a; PQ = x; ſo iſt AQ = a + x; und $NQ^2 = p . AQ = ap + px$; alſo $NQ = \sqrt{ap + px}$, und $AKNQ = \frac{2}{3} . AQ.$

QN

QN (80) $= \frac{2}{3}(a+x)\sqrt{ap+px}$. Eben ſo iſt $PM^2 = p.AP = ap$ und $PM = \sqrt{ap}$. Alſo $AKMP = \frac{2}{3} AP.PM = \frac{2}{3} a\sqrt{ap}$ und $AKNQ - AKMP = \frac{2}{3}(a+x)\sqrt{ap+px} - \frac{2}{3} a\sqrt{ap} = PMNQ = \frac{2}{3}([a+x]\sqrt{ap+px} - a\sqrt{ap})$

85. Zuſ. 5. Das hier abzuziehende Glied $\frac{2}{3} a\sqrt{ap}$ hätte man auch aus dem Werthe von $AKNQ = \frac{2}{3}(a+x)\sqrt{ap+px}$ herleiten können, wenn man in ihm $x = 0$ geſetzt, und das was alsdenn übrig geblieben, mit in Betrachtung gezogen hätte. Denn für $x = 0$ verwandelt ſich AKNQ in AKMP, in das Stück das man von AKNQ abziehen muß, um PMNQ allein zu bekommen, weil hier nach der Bezeichnung, (84) der Abſciſſen Anfang in P liegt. Man nennt dieſes die Erfindung der beſtändigen Größen, die zu Ergänzung oder Abkürzung des erſt gefundenen Werthes der veränderlichen Fläche hinzugeſchrieben werden müſſen, wenn ſelbige nicht, wie bey den vorhergehenden Exempeln geſchehen würde, für $x = 0$, ſelbſt Null wird; welches zu erkennen giebt, daß der gefundene Ausdruck die Quadratur, ohne Hinzuthuung oder Abzug einer beſtändigen Größe, vollſtändig giebt. Denn $\int(ey)$ bezeichnet überhaupt jede Fläche, die wie PMNQ zwiſchen zween parallelen Applicaten, PM, NQ, einem Theile der Abſciſſenlinie PQ, als einer Baſi, und einem Bogen MN der krummen Linie, enthalten iſt, in welcher jedes NQ ein y vorſtellt, das zu der Abſciſſe x gehört, die ſich in Q endigt, bey welcher aber P willkührlich angenommen werden kann. Für $x = 0$, wird auch meiſtentheils die Fläche ſelbſt verſchwinden, und das geſchieht allemal, wenn P, der Ab-

ſciſſen

ſciſſen Anfang, auf A liegt, wo die Abſciſſenlinie die krumme Linie ſchneidet, und alſo für x = o auch die eine Ordinate PM = o wird. Wenn aber der für die veränderliche Fläche gefundene Ausdruck für x = o nicht verſchwindet, ſo erkennt man daraus, um wie viel derſelbe dafür zu groß oder zu klein ſey, nachdem das Uebriggebliebene poſitiv oder negativ iſt, und alſo davon abgezogen oder dazu addirt werden muß. Die Figur erläutert dieſes, ſo wie die folgenden Beyſpiele, ſehr deutlich.

Daß man die Conſtans für x = o zu beſtimmen ſucht, iſt nicht nothwendig, man kann ſie auch für andere Werthe von x beſtimmen. Die Vorausſetzung von x = o iſt nur die einfachſte; ja zuweilen geſchieht es, daß für x = o das Uebriggebliebene imaginär oder unendlich iſt; woraus ſich alſo nichts beſtimmen läßt, weil die hieraus gefolgerte Conſtans, die veränderliche Fläche ſelbſt imaginär oder unendlich machen würde, welches beydes ungereimt iſt. Auf ſo einen Fall kann man x einer andern Größe gleich, ja ſelbſt unendlich groß, annehmen, wenn nur bey dieſer Vorausſetzung ein endlicher reeller Werth oder Null für die Conſtans folgt; wie man aus folgenden mit mehrern erſehen wird. Dieſe beſtändigen Größen oder Conſtantes pflegt man durch Conſt. oder auch nur durch ein bloßes C anzuzeigen.

86. Aufg. 15. Alle krumme Linien zu quadriren, die der Gleichung $y^m = \alpha + x$ zugehören.

Aufl. Man ſetze $\alpha + x = \omega$, ſo iſt das Element e der Abſciſſe $\alpha + x$ mit dem Elemente von ω einerley, oder el. x = el. ω; und $y = \omega^{\frac{1}{m}}$ alſo die Summe aller Ordinaten, das iſt hier (79) die veränderliche Fläche

$$Z = 1 + 2^{\frac{1}{m}} + 3^{\frac{1}{m}} + 4^{\frac{1}{m}} + 5^{\frac{1}{m}} \ldots + \omega^{\frac{1}{m}}$$

=

$$= \frac{\omega^{\frac{1}{m}+1}}{\frac{1}{m}+1} \; (67) = \frac{m}{1+m} . \, \omega^{\frac{1+m}{m}} ; = \int(ey)$$

oder, den Werth von ω ſubſtituirt,

$$Z = \frac{m}{1+m} (\alpha + x)^{\frac{1+m}{m}} + \text{Conſt};$$ wo die Conſtans nur noch zu beſtimmen iſt, und folgendergeſtalt gefunden wird. Für $x = 0$, ſoll auch die Fläche $Z = 0$ ſeyn (85).

Man ſetze alſo in $Z = \frac{m}{1+m} (\alpha + x)^{\frac{1+m}{m}}$; $x = 0$;

Dieſes giebt $Z = \frac{m}{1+m} . \, \alpha^{\frac{1+m}{m}}$. Alſo iſt der erſte Ausdruck, für $x = 0$, um ſo viel zu groß, und kommt alſo

$$C = - \frac{m}{1+m} \alpha^{\frac{1+m}{m}}$$ folglich

$$Z = \frac{m}{1+m} \left([\alpha + x]^{\frac{1+m}{m}} - \alpha^{\frac{1+m}{m}} \right)$$ In andern Fällen, wenn das, was von Z übrig bleibt, nachdem man $x = 0$ geſetzt hat, eine negative Größe iſt, wird dieſe Conſtans poſitiv zu dem erſtgefundenen Ausdrucke von Z hinzugethan. Für die Gleichung $y^m = x - \alpha$; wäre

$$Z = \frac{m}{1+m} (x - \alpha)^{\frac{1+m}{m}} + \text{Conſt.}$$ wo die Conſtans

ver-

verſchiedentlich beſtimmt werden kann (85) nachdem hier m eine gerade oder ungerade Zahl iſt; wenigſtens kann hier nicht in beyden Fällen für $Z = 0$; auch $x = 0$ geſetzt werden. Beyde Gleichungen $y^m = x \pm \alpha$ gehören zu dem paraboliſchen Geſchlechte, und iſt hier der Parameter $p = 1$ geſetzt worden. In beyden iſt der Abſciſſen Anfang um die Größe α, aber nach entgegengeſetzten Richtungen, vom Scheitel A entfernt.

87. Expl. 1. Für $m = 2$; und $\alpha = a$, käme aus der erſten Gleichung $y = (a+x)^{\frac{1}{2}}$ und $\int (c\, y)$ oder

$$Z = \tfrac{2}{3}\left([a+x]^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right) = \tfrac{2}{3}\left([a+x]\sqrt{a+x} - a\sqrt{a}\right)$$

für die gemeine oder Apolloniſche Parabel von dem Parameter $p = 1$. Will man ſtatt 1 den Buchſtaben p wieder ſetzen, ſo darf man nur darauf Acht haben, was die Gleichheit der Abmeſſungen für die Fläche Z erfordert. Dieſes giebt $Z = \tfrac{2}{3}\left([a+x]\sqrt{ap+px} - a\sqrt{ap}\right)$, gerade ſo wie (84). Der Abſciſſen Anfang liegt hier in P. (85)

Expl. 2. Für $m = 2$; käme aus der andern Gleichung $y = (x-\alpha)^{\frac{1}{2}}$ und hieraus $Z = \tfrac{2}{3}(x-\alpha)^{\frac{3}{2}} + C$. Sollte nun hier $Z = 0$ für $x = 0$ ſeyn: ſo käme $0 = \tfrac{2}{3}(-\alpha)^{\frac{3}{2}} + C = \tfrac{2}{3}\sqrt[2]{(-\alpha)^3} + C$ oder $C = -\tfrac{2}{3}a\sqrt[2]{-a}$, alſo die Conſtans, und durch ſie die veränderliche Fläche ſelbſt, unmöglich. Eben das geſchieht, was man auch für eine gerade Zahl ſtatt m ſubſtituirt. Man ſetze alſo, es ſolle $Z = 0$ für $x = \alpha$ ſeyn, ſo verwandelt ſich der Ausdruck (86) $Z = \frac{m}{1+m}(x-\alpha)^{\frac{1+m}{m}} + C$ in

$$0 = C$$

$o = C$, alſo iſt hier die Conſtans Null, und $Z = \frac{m}{1+m}$

$(x-\alpha)^{\frac{1+m}{m}}$ für $x = \alpha$ vollſtändig; und ſo hätte man auch x einer andern Größe, die nicht kleiner als α iſt gleich, und dafür $Z = o$ ſetzen können.

Für ein ungerades m hingegen, kann auch $Z = o$ für $x = o$ angenommen werden; denn das giebt $o = \frac{m}{1+m}$

$(-\alpha)^{\frac{1+m}{m}}$ + Conſt. oder Conſt. $= -\frac{m}{1+m}$

$\sqrt[m]{(-\alpha)^{1+m}} = -\frac{m}{1+m} \cdot \alpha^{\frac{1+m}{m}}$ Die gerade Zahl $(1+m)$ macht nämlich die $(1+m)$te Potenz von $-\alpha$ poſitiv (Alg. 31.), und wenn auch das nicht wäre, ſo iſt doch die ungerade Wurzel (hier $\sqrt[m]{\ }$) einer Größe, immer möglich, wenn auch dieſe Größe negativ iſt. Alſo iſt hier $Z = \frac{m}{1+m} \left([x-\alpha]^{\frac{1+m}{m}} - \alpha^{\frac{1+m}{m}}\right)$ für die veränderliche Fläche vollſtändig. Der Abſciſſen Anfang liegt hier in B, ſo daß $BA = \alpha = AP$ (87)

Expl. 3. Für unendliche Hyperbeln zwiſchen ihren Aſymptoten, wäre (21) $y^m x^k = \alpha^{m+k}$, alſo

$y = \frac{\alpha^{\frac{m+k}{m}}}{x^{\frac{k}{m}}} = \alpha^{\frac{m+k}{m}} x^{\frac{-k}{m}}$ alſo das Flächenele-

ment

ment, oder $ey = e.\alpha^{\frac{m+k}{m}} x^{\frac{-k}{m}}$, und die veränderliche Fläche oder $Z = \frac{\alpha^{\frac{m+k}{m}} x^{\frac{-k}{m}+1}}{\frac{-k}{m}+1}$

$= \frac{m\alpha^{\frac{m+k}{m}}}{(m-k)x^{\frac{k-m}{m}}}$ beydes für rechtwinklichte Aſymptoten. Wenn $m = 1 = k$ geſetzt wird: ſo kommt für die gemeine Hyperbel $ey = e.\alpha^2 x^{-1}$ und $\int(ey) = \alpha^2.\int\left(\frac{e}{x}\right)$ wo man $\frac{e}{x}$ d. i. ex^{-1} nach 67. nicht ſummiren kann, denn ſonſt käme $\int\left(\frac{e}{x}\right) = \frac{x^0}{0} + C = \frac{1}{0} + \text{Conſt}$; welches ungereimt iſt, weil die veränderliche Fläche Z weder unveränderlich noch unendlich ſeyn kann (Anal. 219. I—III). Die Art und Weiſe ſolche Größen zu ſummiren, wird weiter unten (118) gezeigt werden.

Für $m = 1$; $k = 2$; oder für die cubiſche Hyperbel $y = \frac{\alpha^3}{x^2}$, wäre $Z = -\alpha^3 x^{-1} + C = -\frac{\alpha^3}{x} + C$ Hier nun kann man, C zu beſtimmen, für x jeden endlichen, ja ſelbſt einen unendlich großen Werth annehmen,

men, und dafür $Z = 0$ ſetzen. Nähme man aber für $Z = 0$ auch $x = 0$; ſo würde $0 = -\frac{\alpha^3}{0} + C$, oder $C = \infty$, welches nicht ſtatt haben kann. (Expl. 2.) Setzte man $Z = 0$ für $x = b$, ſo wäre Conſt $= \frac{\alpha^3}{b}$, und hier $Z = \frac{\alpha^3 (x-b)}{bx}$. Aber $Z = 0$ für $x = \infty$, giebt $C = 0$; alſo $Z = -\frac{\alpha^3}{x}$, die zugehörige veränderliche Fläche vollſtändig, aber negativ. Die Bedeutung und Lage einer ſolchen negativen Fläche, hat Herr Hofrath Käſtner (Anal. 211) umſtändlich aus einander geſetzt. Eine negative Fläche iſt nämlich bey den Quadraturen ſo etwas, was die negative Subtangente im vorigen Capitel (21) iſt. Sie liegt an eben der Ordinate, die den poſitiven Raum zwiſchen ihr und dem Anfange der Abſciſſen begränzt, aber nicht an eben der Seite dieſer Ordinate, auf welcher der Anfang der Abſciſſen ſich befindet.

Die Erfindung der beſtändigen Größen findet man ausführlich und ſchön von dem Hrn. von Segner abgehandelt Calc. Integr. P. I. Sect. VI.

88. Aufg. 16. Die Fläche der Ellipſe ADBEA (Fig. 17.) vermittelſt des Segmentes CDMP $= Z$, zwiſchen der halben kleinen Axe CD und der Ordinate MP zu quadriren.

Aufl. Für $CP = u$; $PM = y$; $CD = \frac{1}{2}c$; $CA = \frac{1}{2}a$; iſt $y^2 = \frac{c^2}{4a^2}(a^2 - 4u^2)$ und $y = \frac{c}{2a}$

 $(a^2 -$

$(a^2-4u^2)^{\frac{1}{2}}$, alſo, wenn e ein Element der Abſciſſe u iſt, $ey = e.\frac{c}{2a}(a^2-4u^2)^{\frac{1}{2}}$ und $\int(ey)$ oder $Z = \frac{c}{2a}$ $\int(e[a^2-4u^2]^{\frac{1}{2}})$

Hier verwandle man den Irrationalausdruck $(a^2-4u^2)^{\frac{1}{2}}$ in eine Reihe, vermittelſt der bekannten Newtoniſchen Binomialformel $(P+PQ)^m = P^m + \frac{m}{1}AQ + \frac{m-1}{2}BQ + \frac{m-2}{3}CQ + \frac{m-3}{4}DQ + \frac{m-4}{5}EQ \ldots + \frac{m-n}{n+1}\Omega Q$, wo in dem itzigen Falle $P = a^2$; $Q = -\frac{4u^2}{a^2}$; $m = \frac{1}{2}$ und A, B, C, D, E, … Ω die jedesmaligen unmittelbar vorhergehenden einzelnen Glieder der Reihe bedeuten. Dieſes giebt $\sqrt{a^2-4u^2}$ oder

$$(a^2-4u^2)^{\frac{1}{2}}\begin{cases} = a - \frac{2u^2}{a} - \frac{2u^4}{a^3} - \frac{4u^6}{a^5} \\ \quad - \frac{10u^8}{a^7} - \frac{28u^{10}}{a^9} - \frac{84u^{12}}{a^{11}} \ldots \\ = a - \frac{(2u)^2}{2a} - \frac{1.(2u)^4}{2.4.a^3} - \frac{1.3.(2u)^6}{2.4.6.a^5} \end{cases}$$

—

$$(a^2 - 4u^2)^{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{array}{l} - \frac{1.3.5.(2u)^8}{2.4.6.8.a^7} - \frac{1.3.5.7.(2u)^{10}}{2.4.6.8.10.a^9} \\ - \frac{1.3.5.7.9.(2u)^{12}}{2.4.6.8.10.12.a^{11}} \ldots \end{array} \right.$$

und $\frac{c}{2a}(a^2 - 4u^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{c}{2} - \frac{cu^2}{a^2} - \frac{1.2^1.cu^4}{1.2.a^4}$

$$- \frac{1.3.2^2 cu^6}{1.2.3.a^6} - \frac{1.3.5.2^3.cu^8}{1.2.3.4.a^8}$$

$$- \frac{1.3.5.7.2^4 cu^{10}}{1.2.3.4.5.a^{10}} - \frac{1.3.5.7.9.2^5.cu^{12}}{1.2.3.4.5.6.a^{12}} \ldots$$

$$\ldots - \frac{1.3.5\ldots(2n-5).2^{n-2}.cu^{2n-2}}{1.2.3\ldots(n-1)a^{2n-2}} = y;$$

wo man, das nte Glied der Reihe auszudrücken, ſtatt n alle ganze poſitive Zahlen von 3 an, ſubſtituiren kann; weil hier mit dem dritten Gliede alle übrigen nach einem gemeinſchaftlichen Geſetze fortgehen. Für $n = 4$; wird z. E. $2n - 5 = 3$; und $n - 1 = 3$; woraus erhellet, daß man in dem Zähler, die ungeraden Zahlen als Factoren nur bis auf 3, und in dem Nenner die natürlichen Zahlen eben ſo weit, und nicht weiter, fortſetzen, alſo das vierte Glied $- \frac{1.3.2^2.cu^6}{1.2.3.a^6}$ ſeyn müſſe. Dieſe Erinnerung hat auch im folgenden ihren Nutzen. Hätte man aber das Glied, wo das Geſetz anhebt, (hier das dritte Glied) für das erſte annehmen wollen, ſo hätte man für das nte Glied nach dieſer Rechnung, oder für das $(n+2)$te der Reihe, $- \frac{1.3.5\ldots(2n-1).2^n.cu^{2n+2}}{1.2.3\ldots(n+1).a^{2n+2}}$

 ſchrei-

ſchreiben müſſen, wo man ſtatt n auch 1; 2; und alle übrige ganze poſitive Zahlen ſubſtituiren kann.

Obige Reihe für y ſtellt nun jede Ordinate, auf oder zwiſchen den Puncten C; P; der Abſciſſe CP, allgemein vor, und es giebt hier ſo viel Ordinaten über CP, ſo oft e in u enthalten ſeyn kann, das iſt $\frac{u}{e}$. Man ſummire alſo gehörigermaßen (66) jedes einzelne Glied der Reihe beſonders, ſo bekommt man auf die Art die Summe aller Ordinaten, das iſt (79.) die Fläche CDMP = Z. Stellt man ſich nun die Abſciſſen dieſer Ordinaten unter der unendlichen Reihe 1, 2, 3, 4, ... u vor, in welcher u gegen 1 unendlich groß iſt, weil hier jede Zahl ein Multiplum der unendlich kleinen Einheit e bedeutet, deren u eine unendliche Menge ausdrückt, ſo giebt, das erſte Glied $\frac{cu^0}{2}$ d. i. $\frac{c}{2}$, multiplicirt mit $(1+2^0+3^0+4^0\ldots+u^0)$ zum Producte $\frac{cu}{2}$ (66) als die Summe aller erſten Glieder; alſo iſt $-ſ(\frac{cu^2}{a^2})$ oder

$$-\frac{c(1+2^2+3^2+4^2\ldots+u^2)}{a^2} = -\frac{cu^3}{3.a^2}$$

die Summe aller zweyten Glieder; und $-ſ(\frac{1.2^1.cu^4}{1.2.a^4})$

d. i. $-1.2^1.c\frac{(1+2^4+3^4+4^4\ldots+u^4)}{1.2\,a^4} = -\frac{1.2^1.cu^5}{1.2.5.a^4}$

die Summe aller dritten Glieder; u. ſ. w. bey den übrigen.

Am

Am leichteſten kann man ſich die Sache auf folgende Art vorſtellen. Wenn man, der Kürze wegen, in dem Werthe von y, die Coefficienten der Potenzen von u in den einzelnen Gliedern, nach der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ꝛc. nennt, ſo iſt

$$y = \alpha u^0 - \beta u^2 - \gamma u^4 - \delta u^6 - \varepsilon u^8 - \zeta u^{10} \ldots$$

die allgemeine Ordinate. Aus ihr bekommt man, wenn man in u nach und nach 1 e; 2 e; 3 e; 4 e u. ſ. w. ſubſtituirt, (73) die erſte, zweyte, dritte, vierte ꝛc. Ordinate von C an gerechnet, die alle einander unendlich nahe liegen; und ſo giebt $\frac{u}{e}$. e ſtatt u ſubſtituirt, die $\frac{u}{e}$te, oder letzte, der Abſciſſe CP zugehörige Ordinate, und die Summe von allen in die unendlich kleine Baſin e multiplicirt, die veränderliche Fläche CDMP = Z. Demnach iſt

$\alpha . 1 . e^0 - \beta . 1 . e^2 - \gamma . 1 . e.^4 - \delta . 1 . e^6 - \varepsilon . 1 . e^8 \ldots$ die 1ſte Ordinate

$\alpha . 2^0 . e^0 - \beta . 2^2 . e^2 - \gamma . 2^4 . e^4 - \delta . 2^6 . e^6 - \varepsilon . 2^8 . e^8 \ldots$ die 2te Ordinate

$\alpha . 3^0 . e^0 - \beta . 3^2 . e^2 - \gamma . 3^4 . e^4 - \delta . 3^6 . e^6 - \varepsilon . 3^8 . e^8 \ldots$ die 3te Ordinate

$\alpha . 4^0 . e^0 - \beta . 4^2 . e^2 - \gamma . 4^4 . e^4 - \delta . 4^6 . e^6 - \varepsilon . 4^8 . e^8 \ldots$ die 4te Ordinate

. . . . .

. . . . .

. . . . .

und $\alpha (\frac{u}{e})^0 . e^0 - \beta . (\frac{u}{e})^2 . e^2 - \gamma . (\frac{u}{e})^4 . e^4 - \delta . (\frac{u}{e})^6 . e^6 - \varepsilon . (\frac{u}{e})^8 . e^8 \ldots$

die $\frac{u}{e}$te Ordinate

---

alſo (66) $\frac{\alpha u}{e} - \frac{\beta u^3}{3e} - \frac{\gamma u^5}{5e} - \frac{\delta u^7}{7e} - \frac{\varepsilon u^9}{9e} \ldots$ die

 Summe

Summe aller Ordinaten, die in e multiplicirt, und die Werthe der griechiſchen Buchſtaben ſubſtituirt

$$Z = \frac{cu}{2} - \frac{cu^3}{3.a^2} - \frac{1.2^1.cu^5}{1.2.5.a^4} - \frac{1.3.2^2.cu^7}{1.2.3.7.a^6}$$

$$- \frac{1.3.5.2^3.cu^9}{1.2.3.4.9.a^8} - \frac{1.3.5.7.2^4.cu^{11}}{1.2.3.4.5.11.a^{10}}$$

$$- \frac{1.3.5.7.9.2^5.cu^{13}}{1.2.3.4.5.6.13.a^{12}} \ldots - \frac{1.3.5\ldots(2n-5).2^{n-2}.}{1.2.3\ldots(n-1)(2n-1).}$$

$\frac{cu^{2n-1}}{a^{2n-2}}$ giebt, wo keine Conſtans weder zu addiren noch ſubtrahiren nöthig iſt, weil hier, für $u = 0$ die Fläche Z verſchwindet (85). Dieſe Reihe hat bis itzt noch in keine endliche beſtimmte Summe gebracht werden können, weshalb auch die ganz genaue Quadratur der Ellipſe nicht kann gegeben werden.

89. Anmerk. Den Ausdruck für die Fläche Z hätte man geſchwinder finden können, wenn man nur ſogleich die einzelnen Glieder der Reihe für y, d. i. $\alpha u^0 - \beta u^2 - \gamma u^4 \ldots$ nach (79) ſummirt hätte. Ich habe aber hier mit Fleiß die Sache etwas umſtändlicher auseinander geſetzt, theils um ein für allemal zu zeigen, daß das Verfahren für die Quadraturen immer daſſelbe bleibt, die Ordinate mag in einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gliedern gegeben ſeyn, und wie man ſich dabey auf den letzten Fall zu verhalten habe; theils aber auch 79. durch ein Beyſpiel zu erläutern, woraus man noch deutlicher einſehen lernt, in wiefern man ſagen könne, daß die Summe aller Ordinaten über CP, die zu der unendlichen Reihe 1, 2, 3, 4 . . . u gehören, mit der Fläche CDMP übereinkomme; und zugleich dadurch dem Vorwurfe auszuweichen, als ob man ſich hier, wider die erſten Begriffe der Elementargeometrie, die Flächen aus

aus Linien, als Theilen, zuſammengeſetzt vorſtelle: welcher Einwurf einem Ungeübten leicht einfallen kann, wenn er lieſet, wie la Caille in ſeinen Anfangsgründen der Algebra (888. 892.) und andere mit ihm, die Quadratur der Flächen, ohne weitere Erinnerung, behandeln.

Endlich iſt noch anzumerken, daß man die Entwickelung und Auflöſung der Ordinate, ſo wie jeder andern Größe, in eine unendliche Reihe, von welcher man nachher die Glieder einzeln ſummirt, nicht eher vornehmen müſſe, als bis man ſich auf keine andere Art zu helfen weis. Dieſe Auflöſung muß immer die letzte Zuflucht bleiben, weil die Subſtitution (86) Verwandlung der Größen, und andere Kunſtgriffe von der Art, den vorgegebenen Ausdruck ſehr oft in eine ſolche Form umſchaffen, die man nach den bekannten gewöhnlichen Vorſchriften behandeln kann.

90. Zuſ. 1. Für $u = \frac{1}{2}a$, wird $CPMD = CADC$

$$= \frac{ac}{4} - \frac{ac}{3.2^3} - \frac{1.ac}{1.2.5.2^4} \ldots \text{ oder:}$$

$$CADC = \tfrac{1}{4}ac - \frac{\frac{1}{4}ac}{6} - \frac{1.\frac{1}{4}ac}{2.4.5} - \frac{1.3.\frac{1}{4}ac}{2.4.6.7}$$

$$\frac{1.3.5.\frac{1}{4}ac}{2.4.6.8.9} - \frac{1.3.5.7.\frac{1}{4}ac}{2.4.6.8.10.11} - \frac{1.3.5.7.9.\frac{1}{4}ac}{2.4.6.8.10.12.13} \ldots$$

$$- \frac{1.3.5\ldots(2n-5).\frac{1}{4}ac}{2.4.6\ldots2(n-1)(2n-1)} = \text{dem Quadranten}$$

der Ellipſe. Setzt man alſo überall ac ſtatt $\frac{1}{4}ac$, ſo hat man den Innhalt der ganzen Ellipſe ADBEA (88)

91. Zuſ. 2. Weil $CPMD - \triangle CPM = CMD$, ſo findet man den elliptiſchen Sector

$$CMD = Z - \tfrac{1}{2}uy = Z - \tfrac{1}{2}\left(\frac{cu}{2} - \frac{cu^3}{a^2} - \frac{1.2^1.cu^5}{1.2.a^4} - \frac{1.3.2^2.cu^7}{1.2.3.a^6} - \frac{1.3.5.2^3.cu^8}{1.2.3.4.a^8} \ldots\right.$$

oder, den Werth für Z aus 88. ſubſtituirt, und gehörig addirt:

$$CMD = \frac{cu}{4} + \frac{cu^3}{6.a^2} + \frac{3cu^5}{10a^4} + \frac{5cu^7}{7a^6} + \frac{35cu^9}{18a^9} \ldots$$

Für $u = \tfrac{1}{2}a$, wird alsdenn der elliptiſche Quadrant

$$CADC = \tfrac{1}{4}ac\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{3}{80} + \frac{5}{224} + \frac{35}{2304} \ldots\right)$$

$= \tfrac{1}{4}acS$; wenn man S für die Zahlenreihe ſetzt, und ſo kommt acS für die ganze Ellipſe.

92. Aufg. 17. Die Fläche der Ellipſe ADBEA vermittelſt des Abſchnittes $APM = Q$ zu quadriren.

Aufl. Für $AP = x$; $PM = y$; iſt $y^2 = \frac{c^2ax - c^2x^2}{a^2}$ und $y = \frac{cx^{\frac{1}{2}}}{a}(a-x)^{\frac{1}{2}}$. Man erhebe $a - x$ zur Potenz $\tfrac{1}{2}$; ſo kommt, aus (88) nach gehöriger Beſtimmung der Buchſtaben P; Q; m; A; B &c. $y = \frac{cx^{\frac{1}{2}}}{a}$ $\left(a^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{8a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^3}{16a^{\frac{5}{2}}} \ldots\right)$ oder $y = \frac{cx^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$ —

$$- \frac{cx^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1.\,cx^{\frac{5}{2}}}{2.\,4.\,a^{\frac{5}{2}}} - \frac{1.\,3cx^{\frac{7}{2}}}{2.\,4.\,6.\,a^{\frac{7}{2}}} - \frac{1.\,3.\,5.\,cx^{\frac{9}{2}}}{.4.\,6.\,8.\,a^{\frac{9}{2}}}$$

$$- \frac{1.\,3.\,5.\,7.\,cx^{\frac{11}{2}}}{2.\,4.\,6.\,8.\,10.\,a^{\frac{11}{2}}} - \frac{1.\,3.\,5.\,7.\,9.\,cx^{\frac{13}{2}}}{2.\,4.\,6.\,8.\,10.\,12.\,a^{\frac{13}{2}}} \ldots \text{ alſo}$$

(79.) ſ(ey) das iſt:

$$Q = \frac{cx^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}.\,a^{\frac{1}{2}}} - \frac{cx^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}.\,2.\,a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1.\,cx^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}.\,2.\,4.\,a^{\frac{5}{2}}} - \frac{1.\,3.\,x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}.\,2.\,4.\,6.\,a^{\frac{7}{2}}} \ldots$$

oder $Q = \sqrt{\frac{x}{a}} \Big(\frac{2cx}{3} - \frac{cx^2}{5a} - \frac{1.\,cx^3}{7 \times 1.\,4.\,a^2}$

$$- \frac{1.\,3.\,cx^4}{9 \times 1.\,4.\,6.\,a^3} - \frac{1.\,3.\,5.\,cx^5}{11 \times 1.\,4.\,6.\,8.\,a^4}$$

$$- \frac{1.\,3.\,5.\,7.\,cx^6}{13 \times 1.\,4.\,6.\,8.\,10.\,a^5} - \frac{1.\,3.\,5.\,7.\,9.\,cx^7}{15 \times 1.\,4.\,6.\,8.\,10.\,12.\,a^6} \ldots$$

$$\ldots - \frac{1.\,3.\,5.\,7.\,9.\,11 \ldots (2n-5)\,cx^n}{(2n+1) \times 1.\,4.\,6.\,8.\,10.\,12.\,14 \ldots 2(n-1).\,a^{n-1}} \Big)$$

für den Abſchnitt APM; wo das Geſetz des Fortgangs der Glieder, wie in 88. mit dem dritten Gliede anfängt.

93. Zuſ. 1. Für $x = \frac{1}{2}a$, wird APM = ACD, alſo

$$ACD = \frac{ac}{\sqrt{2}} \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{5.\,2^2} - \frac{1}{7 \times 1.\,4.\,2^3} - \frac{1.\,3}{9 \times 1.\,4.\,6.\,2^4}$$

$$- \frac{1.\,3.\,5}{11 \times 1.\,4.\,6.\,8.\,2^5} \ldots - \frac{1.\,3.\,5.\,7 \ldots (2n-5)}{(2n+1) \times 1.\,4.\,6.\,8 \ldots 2(n-1).\,2^n}$$

$= \frac{ac}{\sqrt{2}} S'$ für den Quadranten der Ellipſe. Alſo $4 \cdot \frac{ac}{\sqrt{2}} S' = \frac{2^2 ac}{2^{\frac{1}{2}}} S' = 2^{\frac{3}{2}} ac S'$ oder $2 ac S' \sqrt{2}$ für die ganze Ellipſe ADBEA (92) wo S' die vorhergehende Zahlenreihe bedeutet.

94. Zuſ. 2. Weil APM + △MPC = ACM, ſo findet man hieraus den Sector $ACM = Q + \frac{(\frac{1}{2}a - x) \cdot y}{2}$, oder

$$ACM = Q + \left(\frac{a}{4} - \frac{x}{2}\right)\left(\frac{cx^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} - \frac{cx^{\frac{3}{2}}}{2 \cdot a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1 \cdot cx^{\frac{5}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot a^{\frac{5}{2}}} \ldots\right)$$

$$= Q + \frac{a^{\frac{1}{2}} cx^{\frac{1}{2}}}{4} - \frac{5\, cx^{\frac{3}{2}}}{4 \times 2 \cdot a^{\frac{1}{2}}} + \frac{7\, cx^{\frac{5}{2}}}{4 \times 2 \cdot 4 \cdot a^{\frac{3}{2}}} + \frac{9\, cx^{\frac{7}{2}}}{4 \times 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot a^{\frac{5}{2}}}$$

$$+ \frac{33\, cx^{\frac{9}{2}}}{4 \times 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot a^{\frac{7}{2}}} + \frac{195\, cx^{\frac{11}{2}}}{4 \times 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot a^{\frac{9}{2}}} \ldots$$ Oder (92)

$$ACM = \frac{a^{\frac{1}{2}} cx^{\frac{1}{2}}}{4}\left(1 + \frac{x}{6a} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^2}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^2}\right.$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot a^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 x^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot a^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11 \cdot a^5} \ldots$$

$$\left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)\, x^{n-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2(n-1)(2n-1)\, a^{n-1}}\right)$$

95. Zuſ.

95. Zuſ. 3. Für $x = \frac{1}{2}a$ wird der elliptiſche Sector ACM = ACD, alſo

$$ACD = \frac{ac}{4\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1.3}{2^3 4.5} + \frac{1.3.5}{2^4.4.6.7}\right.$$

$$\left. + \frac{1.3.5.7}{2^5.4.6.8.9} + \frac{1.3.5.7.9}{2^6.4.6.8.10.11} \ldots\right) = \text{dem ellipti-}$$

ſchen Quadranten; und das vierfache hiervon, oder die ganze Ellipſe

$$ADBEA = \frac{ac}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1^2.A}{2\times2.3} + \frac{3^2B}{2\times4.5}\right.$$

$$\left. + \frac{5^2C}{2\times6.7} + \frac{7^2D}{2\times8.9} + \frac{9^2E}{2\times10.11} + \frac{11^2F}{2\times12.13} \ldots\right)$$

wo jeder große Buchſtabe das nächſtvorhergehende ganze Glied der Reihe ausdrückt.

96. Aufg. 18. Die Fläche des Kreiſes ADBEA (Fig. 18.) zu quadriren.

Aufl. Da die Ellipſe ſich in einen Kreiß verwandelt, wenn man in der Gleichung für die Ellipſe, Parameter große und kleine Axe einander gleich ſetzt: ſo findet man ſogleich die Quadratur des Kreiſes aus der berechneten Quadratur der Ellipſe. Für den Kreiß alſo, von dem Durchmeſſer a, iſt jedes veränderliche, unbeſtimmte

$$CPMD = \frac{au}{2} - \frac{u^3}{3.a} - \frac{1.2^1u^5}{1.2.5.a^3} - \frac{1.3.2^2u^7}{1.2.3.7.a^5} \ldots$$

$$\ldots - \frac{1.3.5\ldots(2n-5).2^{n-2}.u^{2n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)(2n-1).a^{2n-3}} \quad (88)$$

alſo der Quadrant des Kreiſes, oder

CADC

$$CADC = \frac{1}{4}a^2\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2.4.5} - \frac{1.3}{2.4.6.7}\right.$$

$$\left. - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.9} \ldots\right)$$ [90] $= \frac{1}{4}a^2S$, und der ganze Kreiß ADBEA $= a^2S$, oder auch S, für den Durchmeſſer $a = 1$.

97. Zuſ. 1. Man ſetze den Bogen DM $= \delta$; ſo iſt, für den Halbmeſſer CD $= 1$; alsdenn CP $=$ ſin. δ; PM $=$ coſ. δ; und Sect. MCD $+ \triangle$CPM $= \frac{1}{2}$ DM. CD $+ \frac{1}{2}$ CP. PM $= \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}$ ſin. δ. Coſ. $\delta = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}$ ſin. 2δ (Trigon. 19. S. 5. Zuſ.) $=$ CDMP (Anal. 274.) Aus (91) iſt der Sector.

$$CMD = \frac{au}{4} + \frac{u^3}{6a} + \frac{3u^5}{10.a^3} + \frac{5u^7}{7a^5} + \frac{35u^9}{18a^7} \ldots$$

$= \frac{1}{4}a\delta$; und hieraus auch der Bogen δ gegeben, wenn man dieſe oder eine andere Reihe für CMD mit $\frac{1}{4}a$ dividiret, oder mit $\frac{4}{a}$ multiplicirt.

Setzt man in dem Werthe von CMD, $u = \frac{1}{2}a$; ſo findet man den Quadranten

$$CAD = \frac{a^2}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{3}{80} + \frac{5}{224} + \frac{35}{2304} \ldots\right)$$

$= \frac{a^2}{4}S'$; und ADBEA (96) oder den ganzen Kreiß $= a^2S'$ oder auch S' für $a = 1$. Hier nähert ſich S' nicht ſo geſchwind als S in (96)

98. Zuſ. 2. Eben ſo iſt für den Kreiß jedes unbeſtimmte

APM

$$APM = \sqrt{\frac{x}{a}}\left(\frac{2ax}{3} - \frac{x^2}{5} - \frac{1.\ x^3}{7\times 1.4.\ a}\right.$$

$$\left. - \frac{1.\ 3.\ x^4}{9\times 1.4.6.\ a^2}\ldots - \frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-5)x^n}{(2n+1)\times 1.4.6.8\ldots 2(n-1).\ a^{n-2}}\right)$$

[92] alſo der Quadrant

$$ACD = \frac{a^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5\times 2^2} - \frac{1}{7\times 1.4.2^3}\right.$$

$$- \frac{1.3}{9\times 1.4.6.2^4} - \frac{1.3.5}{11\times 1.4.6.8.2^5}\ldots$$

$$\left. - \frac{1.3.5\ldots(2n-5)}{(2n+1)\times 1.4.6.8\ldots 2(n-1).2^n}\right)[93] = \frac{a^2}{\sqrt{2}}S$$

und 4 ACD, oder der ganze Kreiß

$$ADBEA = \frac{4a^2}{\sqrt{2}}S = 2a^2 S\sqrt{2} \text{ oder } 2S\sqrt{2}$$

für $a = 1$.

99. Zuſ. 3. Für AC $= 1$; und den Bogen AM $= d$, iſt PM $=$ ſin. d; CP $=$ coſ. d; alſo Sect. ACM $-$ $\triangle$MPC $= \frac{1}{2}d - \frac{1}{4}$ſin. 2d (97) $=$ APM; und APM $+$ CDMP, oder der Quadrant ACD $= \frac{1}{2}(\delta + d) + \frac{1}{4}$ (ſin. 2δ $-$ ſin. 2d) [97] alſo, wenn $\delta = d = 45°$, ACD $= \frac{1}{2}$AD $= \delta$, für den Halbmeſſer 1.

100. Zuſ. 4. Aus (94) käme des Kreiſes Ausſchnitt

$$ACM = \frac{a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{4}\left(1 + \frac{x}{6.a} + \frac{1.3.x^2}{2.4.5.a^2} + \frac{1.3.5.x^3}{2.4.6.7.a^3}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)x^{n-1}}{2.4.6\ldots 2(n-1)(2n-1)a^{n-1}}\right)$$

und

und hieraus, wenn man $x = \frac{1}{2}a$ ſetzt, der Quadrant

$$ACD = \frac{a^2}{4\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{2^2.3} + \frac{1.3.}{2^3.4.5} + \frac{1.3.5}{2^4.4.6.7}\ldots\right)$$

und der ganze Kreiß

$$ADBEA = \frac{a^2}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1^2 A}{2 \times 2.3} + \frac{3^2 B}{2 \times 4.5} + \frac{5^2 C}{2 \times 6.7}\ldots\right) \quad [95]$$

101. Aufg. 19. Den Kreiß ADBEA vermittelſt der Tangente AT zu quadriren.

Aufl. Der Secante CT ſey eine andere Ct ſo nahe, daß der Winkel TCt kleiner als jeder gegebene geradlinichte Winkel ſey. Man ſetze die Tangente $AT = z$; das Element dieſer Tangente, oder $Tt = e$, ſo iſt für den Halbmeſſer $AC = 1 = CM$; $TC^2 = 1 + zz$. Mit der Secante CT als einem Halbmeſſer, ſtelle man ſich den unendlich kleinen Bogen TS gezogen vor, ſo iſt in dem Triangel TtS der Winkel TtS unendlich wenig von ATC, und TSt unendlich wenig von dem rechten Winkel TAC verſchieden, alſo $TtS = ATC$; und $TSt = TAC$, folglich $\triangle tST \backsim \triangle TAC$, und

$$TC^2[1+zz] : CA^2[1] = tT^2[e^2] : ST^2 = \frac{e^2}{1+zz}$$

und, wegen der ähnlichen Sectoren CTS; CMm;

$$TC^2[1+zz] : TS^2\left[\frac{e^2}{1+zz}\right] = CM^2[1] : Mm^2 = \frac{e^2}{(1+zz)^2}$$

oder $Mm = \frac{e}{1+zz}$; und der unendlich kleine

Sector

$$\text{Sector CMm} = \tfrac{1}{2}\text{Mm.MC} = \tfrac{1}{2}.\frac{e}{1+zz} = \frac{e}{2}\left(\frac{1}{1+zz}\right)$$
$= \frac{1}{2}.e(z^0 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 \ldots)$ wenn man (in Alg. 13) ſtatt des dortigen x hier durchgängig z^2 ſchreibt. Dieſer unendlich kleine Sector CMm iſt nun ein Element des endlichen veränderlichen Sectors ACM, folglich ACM die Summe aller MCm, oder aller Elemente innerhalb des Bogens AM, und ACM $= \frac{1}{2}\int(e[z^0 - z^2 + z^4 \ldots]) = \frac{1}{2}(\int(ez^0) - \int(ez^2) + \int(ez^4) \ldots)$ oder endlich

$$ACM = \tfrac{1}{2}\left(z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \frac{z^{11}}{11} \ldots\right)$$
[79]

102. Zuſ. 1. Wenn AM $= 45°$, ſo iſt Tang. AM oder $z = 1$; alſo der achte Theil der Kreisfläche $= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots)$ und der Quadrant $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots \frac{1}{2n-1}$; wo das allgemeine oder nte Glied negativ oder poſitiv iſt, nachdem die Zahl n gerade oder ungerade iſt. Das vierfache der leztern Reihe iſt alſo dem ganzen Kreisinnhalte gleich.

Dieſe Quadratur ſcheint in der That, ihrer Simplicität wegen, vor allen übrigen den Vorzug zu verdienen; aber die Reihe convergirt viel zu wenig, ſo daß die Summe der erſten fünf Glieder die Fläche noch nicht einmal in den Zehntheilchen berichtigt. Aber Leibnitz, ihr Erfinder, hat, wie Herr Hofrath Käſtner (Anal. 301.) erinnert, nur dadurch zeigen wollen, daß ſich die Quadratur des Kreiſes durch eine Reihe geben läßt, deren Geſetz man ſo leicht überſehen kann. Ein ſinnreiches Verfahren, die Summe einer beträchtlichen Anzahl von Gliedern dieſer Reihe geſchwind und ziemlich genau zu finden,

finden, zeigt Herr Lambert in ſeiner leſenswürdigen Abhandlung von Verwandlung der Brüche. Beytr. zur Math. 2. Th. 1. Abth. p. 116 - 125.

103. Zuſ. 2. Will man in den Quadranten (102) ſtatt des Halbmeſſers 1, den Durchmeſſer a hineinbringen, ſo darf man nur jedes Glied der Reihe in das Quadrat des Halbmeſſers $\frac{1}{2}a$, alſo in $\frac{1}{4}a^2$, multipliciren, ſo kommt, für dieſen Durchmeſſer a, der Quadrant

$$ACD = \frac{a^2}{4}\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} \ldots\right)$$

alſo $a^2(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots) = \frac{a^2 P}{4}$ für den Innhalt des ganzen Kreiſes; daß alſo die Summe der Leibnitziſchen Zahlenreihe $= \frac{1}{4}P$, dem vierten Theile des berechneten Ludolphiſchen Kreißumfanges P gleich iſt.

104. Zuſ. 3. Auf eine ähnliche Art findet man für die Ellipſe (Fig. 17.) für welche α, γ, die halben, große und kleine, Axen, die Tangente $AT = z$ ſeyn mögen, den Sector

$$CAM = \tfrac{1}{2}\left(\alpha z - \frac{\alpha z^3}{3\gamma^2} + \frac{\alpha z^5}{5\gamma^4} - \frac{\alpha z^7}{7\gamma^6} + \frac{\alpha z^9}{9\gamma^8} \ldots\right)$$

und eben ſo, für die Tangente $TD = w$; den Sector

$$CMD = \tfrac{1}{2}\left(\gamma w - \frac{\gamma w^3}{3\alpha^2} + \frac{\gamma w^5}{5\alpha^4} - \frac{\gamma w^7}{7\alpha^6} + \frac{\gamma w^9}{9\alpha^8} \ldots\right)$$

Wenn nun $AT = CD$, oder $z = \gamma$; ſo iſt auch $TD = AC$ oder $w = \alpha$; Man ſetze alſo dieſe Werthe von z, w, in die Reihen, ſo kommt $CAM = \frac{1}{2}(\alpha\gamma - \frac{1}{3}\alpha\gamma + \frac{1}{5}\alpha\gamma - \frac{1}{7}\alpha\gamma \ldots) = CMD$; alſo beyder Summe, oder $CAM + CMD$ d. i. der elliptiſche Quadrant

$$ACD = \alpha\gamma\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} \ldots\right)$$

und,

und, für α, γ, ihre Werthe $\frac{1}{2}$a, $\frac{1}{2}$c geſetzt; $CAD = \frac{ac}{4}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots)$ alſo, wenn $a = c$, oder für den Cirkel, $CAD = \frac{a^2}{4}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots)$ wie vorhin (103)

105. Zuſ. 4. Der elliptiſche Quadrant läßt ſich alſo immer (90. 91. 93. 95. 104.) als ein Product ac der beyden Axen in eine Zahlenreihe Σ ausdrücken. Wenn alſo (Fig. 19. 20.) $ACD = ac\Sigma$; für den elliptiſchen Quadranten: ſo kommt $ACD' = a^2\Sigma$ für den Quadranten eines Kreiſes um den Ellipſen-Durchmeſſer a. Alſo verhalten ſich beyde Quadranten, und folglich auch die ganze Ellipſe zum ganzen Cirkel $= c : a$, wie die kleine Ellipſenaxe zur großen, oder umgekehrt, nachdem nun hier c kleiner oder größer angenommen wird als a, d. i. nachdem man zum Durchmeſſer a des Cirkels die große (Fig. 19) oder kleine (Fig. 20) Axe der Ellipſe nimmt, den Cirkel um, oder in die Ellipſe ſchreibt. Eben ſo verhalten ſich die elliptiſchen Ausſchnitte ACM, MCD zu den gleichnamichten correſpondirenden Cirkelausſchnitten ACM', M'CD'; ingleichen die Stücke APM, CPMD der Ellipſe, zu den zugehörigen Stücken APM', CPM'D' im Cirkel $= c : a$, wie man aus der Vergleichung ihrer berechneten Werthe ſowohl, als auch daraus abnehmen kann, weil die Flächen dieſer Stücke mit den Summen der zugehörigen Ordinaten (79) übereinkommen, deren Verhältniß in beyden die vorerwähnte iſt.

106. Zuſ. 5. Wenn von einem beliebigen Puncte E in dem Durchmeſſer a eines Cirkels, nach den Endpuncten M, M' der gemeinſchaftlichen Ordinate PMM' des Cirkels und einer damit verbundenen ein- oder umgeſchriebenen Ellipſe, deren beyde Axen a, c; ſeyn mö-

gen, die geraden Linien EM, EM′ gezogen werden: ſo verhält ſich auch der Cirkelausſchnitt AEM′ zu dem Ellipſenausſchnitte AEM = a : c, wie die Cirkelaxe zu der andern Ellipſenaxe. Denn weil APM′ : APM = a : c (105) und △PEM′ : △PEM = PM′ : PM = CD′ : CD = $\frac{1}{2}$a : $\frac{1}{2}$c = a : c; alſo APM′ = $\frac{a}{c}$. APM und PEM′ = $\frac{a}{c}$. PEM; alſo APM′ + △PEM′ oder AEM′ = $\frac{a}{c}$ (APM + △PEM) = $\frac{a}{c}$. AEM, ſo iſt AEM′ : AEM = $\frac{a}{c}$: 1 = a : c. Alſo iſt der elliptiſche Ausſchnitt AEM = $\frac{c}{a}$ von dem zugehörigen Cirkelausſchnitte AEM′, oder AEM = $\frac{c}{a}$. AEM′; den letztern Ausſchnitt aber kann man aus dem Cirkel ſo genau berechnen, als es nur immer die vorgeſetzte Schärfe erfordert, und alſo auch den elliptiſchen aus ihm finden. Dieſer Satz hat in der Aſtronomie ſeinen vielfachen Nutzen, beſonders in der Vorausſetzung, wenn E in dem einem Brennpuncte der Ellipſe liegt.

107. Zuſ. 6. Wären a, c; und α, γ; zwey Paare Axen zwoer verſchiedenen Ellipſen E′ und E; ſo wäre E′ : E = acΣ : $\alpha\gamma$Σ (105) oder E′ : E = ac : $\alpha\gamma$ = (a : α) + (c : γ) alſo das Verhältniß zwoer Ellipſen gegen einander aus den Verhältniſſen ihrer Axen zuſammengeſetzt. Wäre auch a = α; ſo wäre a : α als ein Verhältniß der Gleichheit bey der Zuſammenſetzung als o zu betrachten, und E′ : E = c : γ, in ratione ſimplici directa der beyden ungleichen Axen.

108. Zuſ. 7. Wenn C einen Kreiß vom Durchmeſſer a bedeutet, ſo iſt $C : E = a^2 : \alpha\gamma$. Soll nun $C = E$, Kreiß und Ellipſe einander gleich ſeyn, ſo muß auch $a^2 = \alpha\gamma$ ſeyn, alſo $a = \sqrt{\alpha\gamma}$ genommen werden. Es iſt alſo die Ellipſe einem Kreiſe gleich, deſſen Durchmeſſer die mittlere Proportionale zwiſchen den beyden Axen der Ellipſe iſt. Da nun der Innhalt des Kreiſes $C = \frac{a^2 P}{4}$, ſo iſt der Ellipſen Innhalt oder $E = \frac{\alpha\gamma P}{4}$, wo P die berechnete Ludolphiſche Peripherie 3, 141 ... bedeutet. Das Product alſo der beyden Ellipſenaxen in das Viertel der Ludolphiſchen Zahl, oder in 0, 7853 ... giebt die Quadratur der Ellipſe (104) deſto genauer, jemehr man Decimalen von dieſer Zahl nimmt. Da nun die Zahl P heut zu Tage weiter berechnet iſt, als man ſie bey dem Gebrauche zu irgend einer Abſicht nöthig hat, ſo iſt es allemal vortheilhafter die Quadratur der Ellipſe auf den Cirkel zu reduciren, als eine der vorhergefundenen Zahlenreihen für die Ellipſe dabey zu gebrauchen, deren Richtigkeit und Schärfe ſich auch, wenn es nöthig iſt, aus der Zahl P überſehen läßt. Eben ſo bringt man auch die Berechnung einzelner Stücke der Ellipſe auf den Cirkel, wie 106. zum Theil geſchehen iſt.

109. Aufg. 20. Die Quadratur einer hyperboliſchen Fläche zu finden.

Aufl.:

1) für die Fläche CpMA (Fig. 21.) wo $Cp = PM = y$; $pM = CP = u$, die Hauptaxe $= a$ die andere c iſt.

Die Gleichung einer ſolchen Hyperbel für die Abſciſſen (u) auf der Hauptaxe aus dem Mittelpuncte, iſt bekanntermaßen $y^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}$; alſo, durch Verwandlung der Coordinaten, $u^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 y^2}{c^2} = \frac{a^2}{4c^2}$ $(c^2 + 4y^2)$ die Gleichung für die Abſciſſen (y) auf einer der Hauptaxe ſenkrechten Linie pK durch den Mittelpunct C der Hyperbel. Hier iſt alſo die Ordinate

$$u = \sqrt{\frac{a^2}{4c^2}(c^2+4y^2)} = \frac{a}{2c}\sqrt{c^2+4y^4} = \frac{a}{2c}$$

$(c^2+4y^2)^{\frac{1}{2}}$ und die Vergleichung dieſes Ausdrucks mit (88) zeigt, daß man in der dortigen Reihe, nur a, c, $-u^2$ mit c, a, $+y^2$ verwechſeln darf (welches alſo die geraden Glieder der Reihe poſitiv macht) um aus jener Reihe, die Reihe für die allgemeine Ordinate der Hyperbel

$$u = \frac{a}{2} + \frac{ay^2}{c^2} - \frac{1.2' a y^4}{1.2.c^4} + \frac{1.3.2^2 a y^6}{1.2.3.c^6} - \frac{1.3.5.2^3 a y^8}{1.2.3.4.c^8} \ldots\ldots \mp \frac{1.3.5\ldots(2n-5).2^{n-2}.ay^{2n-2}}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)c^{2n-2}}$$

(poſitiv oder negativ, nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl iſt) herzuleiten.

Und ſo kommt (66. 79)

$$CpMA = \frac{ay}{2} + \frac{ay^3}{3.c^2} - \frac{1.2^1 ay^5}{1.2.5.c^4}$$

$$+ \frac{1.3.2^2.ay^7}{1.2.3.7.c^6} - \frac{1.3.5.2^3 ay^9}{1.2.3.4.9c^8} + \frac{1.3.5.7.2^4 ay^{11}}{1.2.3.4.5.11c^{10}}$$

—

$$-\frac{1.3.5.7.9.2^5.ay^{13}}{1.2.3.4.5.6.13.c^{12}}\ldots\mp\frac{1.3.5\ldots(2n-5)\,2^{n-2}.ay^{2n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)(2n-1)\,c^{2n-2}};$$

wo die Erinnerung (88) wegen n hier nicht aus der Acht zu laſſen iſt. Denn ſonſt gäbe z. E. $n = 1$ oder $n = 2$ geſetzt, etwas ungereimtes oder widerſprechendes in den Zahlencoefficienten, welches nicht zu verwundern iſt, da das Geſetz, aus welchem das nte Glied der Reihe ausgedrückt worden iſt, erſt mit dem dritten Gliede anfängt, und ſich alſo auf die erſten beyden Glieder nicht mit erſtreckt. Eine ähnliche Erinnerung findet man (Alg. 733, II, p. 421.)

2.) Die Fläche $A\pi MA$ findet man, wenn man von $CpMA$ das Rectangel $ACp\pi = AC.\,Cp = \frac{ay}{2}$ abzieht; dieſes giebt

$$A\pi MA = \frac{ay^3}{3c^2} - \frac{1.2^1 ay^5}{1.2.5\,c^4} + \frac{1.3.2^2 ay^7}{1.2.3.7c^6}$$

$$-\frac{1.3.5.2^3 ay^9}{1.2.3.4.9c^8} \text{ u. ſ. w.}$$

3.) Die Fläche AMP d. i. $CPMp - CAMP$ oder auch $APM\pi - AM\pi$ iſt alſo $= xy - \frac{ay^3}{3.c^2}$

$$+\frac{1.2^1.ay^5}{1.2.5c^4} - \frac{1.3.2^2 ay^7}{1.2.3.7c^6} + \frac{1.3.5.2^3 ay^9}{1.2.3.4.9c^8} \text{ u. ſ. w.}$$

wenn $x = AP$ iſt. Wollte man hier x in y ausdrücken, ſo dürfte man nur den Werth von x aus der Gleichung $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax + xx)$ in einer unendlichen Reihe ſuchen, dieſelbe in y multipliciren, und die gefundenen Glieder

mit den übrigen algebraiſch addiren. Will man aber dieſen Raum durchgängig in x haben, ſo ſuche man

$$y = \frac{c}{a}(ax+xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{cx^{\frac{1}{2}}}{a}(a+x)^{\frac{1}{2}}$$ in einer unendlichen Reihe, wo in (92) alles unverändert bleibt, auſſer daß die geraden Glieder der Reihe hier poſitiv werden, weil in dem Binomio ſtatt des dortigen — x hier + x befindlich iſt. Alſo kommt

$$y = \frac{cx^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{cx^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1.cx^{\frac{5}{2}}}{2.4a^{\frac{5}{2}}} + \frac{1.3.cx^{\frac{7}{2}}}{2.4.6.a^{\frac{7}{2}}} - \text{u. ſ. w.}$$

und ſ(ey) oder

$$APM = \sqrt{\frac{x}{a}}\left(\frac{2cx}{3} + \frac{cx^2}{5\times 1.a} - \frac{1.cx^3}{7\times 1.4.a^2}\right.$$

$$+ \frac{1.3.cx^4}{9\times 1.4.6.a^3} - \frac{1.3.5.cx^5}{11\times 1.4.6.8.a^4} + \frac{1.3.5.7.cx^6}{13\times 1.4.6.8.10.a^5}$$

$$\left.- \frac{1.3.5.7.9.cx^7}{15\times 1.4.6.8.10.12.a^6} \text{ u. ſ. w.}\right)$$

4) Den hyperboliſchen Sector CAM zu berechnen, darf man nur von CAMp ein halbes Cp. pM $= \frac{1}{2}yu$ abziehen, und ſtatt u die Reihe (no. 1.) ſubſtituiren, ſo kommt:

$$CAM = \frac{ay}{2} + \frac{ay^3}{3c^2} - \frac{1.2^1ay^5}{1.2.5.c^4} + \frac{1.3.2^2ay^7}{1.2.3.7c^6}$$

$$- \frac{1.3.5.2^3ay^9}{1.2.3.4.9.c^8} \ldots - \frac{y}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{ay^2}{c^2} - \frac{1.2^1ay^4}{1.2.c^4}\right.$$

+

$$+ \frac{1.3.2^2 ay^6}{1.2.3.c^6} - \frac{1.3.5.2^3 ay^8}{1.2.3.4.c^8} \ldots)$$ und nach gehöriger Verkürzung:

$$CAM = \frac{ay}{4} - \frac{1.ay^3}{1.2.3.c^2} + \frac{3.ay^5}{1.2.5.c^4}$$

$$- \frac{10ay^7}{1.2.7.c^6} + \frac{35ay^9}{1.2.9.c^8} - \frac{126ay^{11}}{1.2.11.c^{10}}$$

$$+ \frac{462ay^{13}}{1.2.13.c^{12}}$$ und ſo weiter

Das Geſetz der Diviſoren fällt hier in die Augen. Die Zahlen-Coefficienten der Zähler aber kommen mit den figurirten Zahlen (der Käſtn. Tabelle Alg. 726. welche die Alten Tabulam mirificam nennten) nach folgender Ordnung überein. Der Zähler 1; des zweyten Gliedes iſt die erſte Zahl derer in natürlicher Ordnung von 1 an fortgehenden Zahlen: der Zähler 3; des dritten Gliedes, die zweyte Triangularzahl: der Zähler 10; des vierten Gliedes, die dritte Quadrangularzahl: der Zähler 35; des fünften Gliedes, die vierte Quinquangularzahl: der Zähler 126; des ſechſten Gliedes, die fünfte Sexangularzahl: der Zähler 462; des ſiebenden Gliedes, die ſechſte Septangularzahl: alſo der Zähler m des nten Gliedes die (n — 1)te ntangularzahl. Ich nenne hier Triangular- Quadrangular- Quinquangular- u. ſ. w. Zahlen, die Zahlen der dritten, vierten, fünften u. ſ. w. Columne der angeführten Tafel, um ſie dadurch itzt von den Trigonal- Tetragonal- Pentagonal u. ſ. w. Zahlen (70 — 72) zu unterſcheiden, mit welchen ſie zwar einerley Urſprung (72) aber nicht immer einerley Bedeutung haben; weil bey den Zahlen (70 — 72) jede arithmetiſche Progreßion, bey den figurirten Zahlen hingegen, nur allein die Progreßion der in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlen, zum Grunde liegen kann. Daher, wenn man in den

allgemeinen Gliedern (71) der Reihen C, D, E . . . durchgängig d = 1 ſetzt; ſo kommt $\frac{n}{2}$ (2 + [n — 1]) für die allgemeine Formel der Triangularzahlen; $\frac{n.\ n+1}{2.\ 3.}$ (3 + [n — 1]) für die allgemeine Formel der Quadrangularzahlen; $\frac{n.\ n+1.\ n+2}{2.\ 3.\ 4.}$ (4 + [n — 1]) für die allgemeine Formel der Quinquangularzahlen; alſo $\frac{n.\ n+1.\ n+2\ .\ .\ .\ [n+m-3]}{2.\ 3.\ 4\ .\ .\ .\ .\ [m-1]}$ ([m — 1] + [n — 1]) für die allgemeine Formel der mtangularzahlen der Tafel, wo z. E. für die Quinquangularzahlen m = 5 u. ſ. w. iſt. Bey den Trigonal⸗ Tetragonal⸗ Pentagonal⸗ ꝛc. Zahlen in (70⸗72) hingegen, kommt es auf die Beſtimmung von d an, ſo daß jede der itzt angeführten Formeln (71) Trigonal⸗ Tetragonal⸗ Pentagonal ꝛc. Polygonal⸗ Pyramidal⸗ Zahlen in der 72. feſtgeſetzten Bedeutung geben kann. Daraus nun, daß man beyderley Zahlen insgemein mit einerley, griechiſchen oder lateiniſchen, Namen benennt, können leicht Verwirrungen entſtehen, die ſich aber vermeiden laſſen, wenn man die Zahlen (70—72) durchgehends Trigonal oder Triangular ꝛc. Polygonal, Pyramidalzahlen, die Zahlen der Tafel (Alg. 726.) hingegen figürliche Trigonal⸗ oder Triangular⸗ ꝛc. Zahlen nennt. Der figürlichen Triangular⸗ Quadrangular⸗ u. ſ. w. Zahlen Verhältniß zu den Binomialcoefficienten findet man bey dem Herrn Hofrath Käſtner am angeführten Orte umſtändlich auseinander geſetzt. Die Bernoulliſchen Formeln der figur. Zahlen: $\frac{x.\ x+1}{1.\ 2}$; $\frac{x.\ x+1.\ x+2}{1.\ 2.\ 3}$ &c. Art. Coniect. P. II. C. 3. laſſen ſich aus den obigen, mit denen ſie einerley ſind, leicht herleiten.

5.) Den

5.) Den hyperboliſchen Sector CAM (Fig. 22.) auf eine ähnliche Art, wie den Kreißausſchnitt (101) zu berechnen, ſetze man Tang. AT $=$ z, CT $=$ w; das übrige wie ſonſt, und nehme noch einen andern Sector CAN, deſſen Unterſchied von dem vorigen, oder CMN, kleiner ſey als jede angebliche Fläche beträgt, und nenne das Element von z, oder Tt $=$ e. Zieht man nun die unendlich kleinen Bogen TS, Mm, ſo ſind auſſer den ähnlichen Sectoren CTS, CMm auch CPM ∽ CAT ∽

TSt (101) und CT (w): AC $(\frac{a}{2}) =$ Tt (e) : TS $= \frac{ea}{2w}$;

ingleichen AC $(\frac{a}{2})$: CT (w) $=$ CP (u) : CM $= \frac{2uw}{a}$;

und CT (w): TS $(\frac{ea}{2w}) =$ CM $(\frac{2uw}{a})$: Mm $= \frac{eu}{w}$;

alſo CMm d. i. $\frac{1}{2}$CM. Mm $= \frac{uw}{a} . \frac{eu}{w} = \frac{eu^2}{a}$. Der Sector CMm iſt aber das Element des endlichen Sectors CAM, der aus der Summe aller zwiſchen dem Bogen AM enthaltenen Elementarſectoren zuſammen geſetzt iſt.

Dieſe Summe zu finden, muß man zuvor u in z ausdrücken, auf welches ſich das e bezieht. Es iſt aber

$$CA^2 (\frac{a^2}{4}) : AT^2 (z^2) = CP^2 (u^2) : PM^2 = \frac{4u^2z^2}{a^2}$$

$$= \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}$$ (Alg. 402.) alſo $u^2 = \frac{a^2c^2}{4(c^2-4z^2)}$;

welcher Werth von u^2 in $\frac{eu^2}{a}$ ſubſtituirt, CMm $=$

$$\frac{eac^2}{4(c^2-4z^2)} = \frac{eac^2}{4} . \frac{1}{c^2-4z^2}$$ giebt. Wenn

 man

man alſo 1 durch $c^2 - 4z^2$ gehörig dividirt, und die daher entſtandene Reihe mit $\frac{eac^2}{4}$ multiplicirt, ſo kommt

$$c\left(\frac{az^0}{4} + \frac{az^2}{c^2} + \frac{4az^4}{c^4} + \frac{4^2az^6}{c^6} + \frac{4^3az^8}{c^8} \ldots\right) =$$

CMm; und aus der Summe aller einzelnen Glieder (79)

$$CAM = \frac{az}{4} + \frac{az^3}{3c^2} + \frac{4az^5}{5c^4} + \frac{4^2az^7}{7c^6} + \frac{4^3az^9}{9c^8} \ldots$$

110. Anm. Die von 1-5. berechneten Flächen beziehen ſich auf die ſchiefwinklichte oder ungleichſeitige Hyperbel, ſo lange a und c verſchiedene Größen haben. Setzt man aber in ihnen a = c, ſo bekommt man die Werthe dieſer Flächen für die rechtwinklichte oder gleichſeitige Hyperbel. Noch iſt zu erinnern, daß man bey den Quadraturen, und ſo auch bey den Rectificationen, Cubaturen, ſo wie überhaupt bey allen Größen, die durch eine unendliche Reihe gegeben ſind, wohl Acht haben müſſe, ob auch, und wie ſchnell die Reihe convergirt; welches von der Verhältniß des für die darinn befindliche veränderliche Größe angenommenen Werthes, gegen die beſtändigen Größen, abhängt. Meiſtentheils kann man die Ordinate (y) in einer doppelten Reihe ausdrücken, von welcher die eine bey einer kleinen die andere bey einer großen Abſciſſe (x) geſchwind convergirt, für das Gegentheil aber divergiren und unbrauchbar ſeyn würde. Für $y = A\sqrt{a^2+xx}$ oder $y = B\frac{a}{b+x}$, convergiren die daher entſtehenden Reihen deſto ſtärker, je kleiner x gegen a oder b iſt. Für ein groſſes x hingegen, müßte man

man für y den gleichgeltenden Ausdruck $A\sqrt{xx+aa}$ oder $B\dfrac{\alpha}{x+b}$ entwickeln, wenn die Reihe convergiren ſoll.

111. Aufg. 21. Den hyperboliſchen Raum BPMD (Fig. 23.) zwiſchen zwoen Ordinaten BD, PM, auf der Aſymptote CT zu quadriren.

Aufl. Für $CB=\alpha$; $BD=\beta$; $BP=x$; $PM=y$; den Aſymptotenwinkel $FCT=k$; iſt $(CB+BP)\,PM = CB.\,BD$ (Alg. 412.) d. i. $(\alpha+x)\,y=\alpha\beta$, oder $y=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+x}$; alſo, wenn pm dem PM unendlich nahe, und $Pp=e$ geſetzt wird, $ey=\alpha\beta.\,\text{ſin. }k.\,\dfrac{e}{\alpha+x}$ (74) $=\alpha\beta.\,\text{ſin. }k.\,e\left(\dfrac{x^0}{\alpha}-\dfrac{x}{\alpha^2}+\dfrac{x^2}{\alpha^3}-\dfrac{x^3}{\alpha^4}\ldots\right)=PpmM$, dem Elemente von BPMD, und die Summe aller Elemente (79.) oder $BPMD=\alpha\beta.\,\text{ſin. }k\times\left(\dfrac{x}{\alpha}-\dfrac{x^2}{2\alpha^2}+\dfrac{x^3}{3\alpha^3}-\dfrac{x^4}{4\alpha^4}\ldots\right)$ welche Reihe deſto geſchwinder convergirt je kleiner x gegen α iſt (110.)

112. Zuſ. 1 An die Endpuncte D, M, der beyden Ordinaten BD, PM; ziehe man CD, CM; ſo iſt $\triangle CDB = \frac{1}{2}\,CB.\,BD.\,\text{ſin. }k$ und eben ſo $\triangle CMP=\frac{1}{2}\,CP.\,PM.\,\text{ſin. }k.$ oder, weil $CB.\,BD = CP.\,PM$; (Alg. 412.) $\triangle CDB=\triangle CMP$. Folglich auch $CDB - BoC + DoM = CMP - BoC + DoM$ d. i. Sect. hyp. DCM = Trapez. hyp. BPMD. Eben ſo ſind auch die hyperboliſchen Ausſchnitte MCN; NCS; SCV &c. den jedesmaligen correſpondirenden hyperboliſchen Trape-

zen

zen MPQN; NQRS; SRTV &c. über den Baſibus PQ, QR, RT u. ſ. w. auf der Aſymptote, gleich; daß alſo die Reihe (111.) eben ſowohl für dieſe hyperboliſchen Ausſchnitte als für die aſymptotiſchen Räume gilt.

113. Zuſ. 2. Für den Raum QNRS auf der Baſi QR, zwiſchen den Ordinaten QN, RS, ſey CQ $=\gamma$; QR $=$ z; RS $=$ y; alſo (CQ $+$ QR) RS $=$ CB. BD, d. i. $(\gamma + z)\, y = \alpha\beta$; oder $y = \frac{\alpha\beta}{\gamma+z}$. Dieſes giebt

(111.) QNRS $= \alpha\beta$. ſin. k $\left(\frac{z}{\gamma} - \frac{z^2}{2\gamma^2} + \frac{z^3}{3\gamma^3} - \frac{z^4}{4\gamma^4} \ldots\right)$ und BPMD: QNRS $= \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{x^3}{3\alpha^3} - \ldots\right) : \left(\frac{z}{\gamma} - \frac{z^2}{2\gamma^2} + \frac{z^3}{3\gamma^3} - \ldots\right)$ Soll nun BPMD $=$ QNRS ſeyn, ſo muß auch $\frac{x}{\alpha} = \frac{z}{\gamma}$, d. i. $\alpha : x = \gamma : z$ oder $\alpha : \alpha + x = \gamma : \gamma + z$ d. i. CB: CP $=$ CQ: CR ſeyn. Man nehme alſo auf der Aſymptote CT, einer Hyperbel, von C an ſo viel gleiche Verhältniſſe als man will, ſo werden die hyperboliſchen Räume, deren Baſes die Differenzen der jedesmaligen beyden Glieder dieſer Verhältniſſe ſind einander durchgehends gleich ſeyn.

114. Zuſ. 3. Wenn alſo CB, CP, CQ, CR, CT, &c. in geometriſcher Progreßion auf der Aſymptote genommen werden, ſo ſind die hyperboliſchen Räume über den Grundlinien CP — CB, d. i. BP; CQ — CP, d. i. PQ; CR — CQ, d. i. QR; CT — CR, d. i. RT &c. oder die Trapezen BM; MQ; QS; ST;

ST; &c. ſo wie die zugehörigen Ausſchnitte DCM; MCN; NCS; SCV alle einander gleich, (112. 113.) ſo daß $BN = 2BM$; $BS = 3BM$; $BV = 4BM$ &c. Nun iſt aber in der angenommenen Progreßion, $CP : CB = (CP : CB)^1$; $CQ : CB = (CP : CB)^2$; $CR : CB = (CP : CB)^3$; $CT : CB = (CP : CB)^4$ &c. oder, dieſe Verhältniſſe ſind der einfachen, der verdoppelten (duplicata) verdreyfachten, vervierfachten u. ſ. w. Verhältniß, der als einfach betrachteten Verhältniß CP: CB gleich. Alſo verhalten ſich die Räume BM; BN; BS; BV; zu einander, wie die Logarithmen der Verhältniſſe CP: CB; CQ: CB; CR: CB; CT: CB; d. i. wie die Zahlen 1; 2; 3; 4; oder wie die hier aufeinander folgenden Exponenten der einfachen Verhältniß CP: CB. Die Trapezen BM; BN; BS; BV; oder die ihnen gleiche (112) Sectoren DCM; MCN; NCS; SCV; können alſo als die Maaße oder Logarithmen der nurgedachten Verhältniſſe CP: CB; CQ: CB; CR: CB; CT: CB; angenommen werden, wenn man gleich anfangs BM als das Maaß der einfachen Grundverhältniß CP: CB d. i. $BM = \log. (CP : CB)$ feſt ſetzt, ſo daß die Größe der übrigen Maaße von der Größe des erſtern Maaßes BM abhängt. Die Größe aber eines ſolchen Maaßes oder Logarithmen, läßt ſich für eine gegebene Hyperbel allemal in einer Reihe wie (111.) ausdrücken, bey welcher es auf die Größe des eingeſchriebenen Parallelogramms (welches man den Modul zu nennen pflegt) $CBDK = \alpha\beta$. ſin. k = CI. IA. ſin. k, oder des Productes aus der Hyperbelpotenz in den ſinum des Aſymptotenwinkels, $= \frac{a^2 + c^2}{16}$ ſin. k. (Alg. 413.) ankommt; und ſo erkennt man ſchon hieraus überhaupt die Möglichkeit, wie ſich ein logarithmiſches Syſtem durch die Hyperbel

dar-

darſtellen laſſe; das folgende wird dieſes noch mehr aufklären.

115. Zuſ. 4. Die Abſciſſen CP, CQ, CR &c. auf der Aſymptote CT, mögen zu einer angenommenen CB eine Verhältniß haben, welche ſie wollen, ſo werden ihre aſymptotiſchen Räume, ſo wie die zugehörigen Sectoren, ſich allemal wie die Maaße oder Logarithmen dieſer Verhältniſſe unter einander verhalten. Nun beſchreibe man zwiſchen eben dieſen Aſymptoten noch eine andere, alſo ähnliche (Alg. 416. V.) Hyperbel LEH, und ſetze EB = δ, ſo verhalten ſich die zu einerley Verhältniſſe CP: CB gehörigen Maaße oder Logarithmen in beyden Hyperbeln, oder BM: BH = $\alpha\beta$. ſin. k

$$\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} \ldots\right) : \alpha\delta.\ \text{ſin. k} \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} \ldots\right)$$

[111.] = $\alpha\beta$. ſin. k: $\alpha\delta$. ſin. k, wie die eingeſchriebenen Parallelogramme BK, BG; oder (wie man ſich hier auszudrücken pflegt) wie die Modeln (114) beyder logarithmiſchen Syſteme; oder auch wie $\alpha\beta : \alpha\delta$ d. i. wie die Potenzen CI^2, Ci^2 beyder Hyperbeln (Alg. 413.) Wenn alſo die Verhältniſſe ſowohl als die Hyperbeln, denen ſie zugehören, verſchieden ſind: ſo verhalten ſich die aſymptotiſchen Räume, oder die correſpondirenden Sectoren, gegen einander, zuſammen wie die Maaße oder Logarithmen der anliegenden Verhältniſſe und die Modeln oder eingeſchriebenen Parallelogrammen BK, BG.

116. Zuſ. 5. Es können alſo der Maaße oder Logarithmen für ein und ebendaſſelbe Verhältniß, und alſo auch für andere, aus dieſem auf irgend eine Art zuſammengeſetzte oder getheilte, Verhältniſſe, ſo unzählig viele und verſchiedene angenommen werden, als die Potenzen der Hyperbeln nur immer gegeneinander

ver-

verſchieden ſeyn können. Iſt aber dieſe Potenz, und mit ihr der Model (118) des logarithmiſchen Syſtems einmal feſtgeſetzt, ſo iſt auch zugleich dadurch die Größe aller aſymptotiſchen Hyperbelräume, aus welchen die Verhältniſſe der Abſciſſen auf der Aſymptote gemeſſen werden, beſtimmt, ſo daß jede Hyperbel ein vollſtändiges logarithmiſches Syſtem giebt, wenn einmal eine Verhältniß der Abſciſſen auf der Aſymptote als eine einfache Grundverältniß feſt geſetzt worden iſt.

117. Anm. Logarithmen der Zahlen, oder der in Zahlen ausgedrückten Verhältniſſe, werden eigentlich diejenigen Zahlen genennet, welche anzeigen, wie eine gewiſſe gegebene Verhältniß p: q, aus einer andern, die man als eine einfache Verhältniß zum Grunde legt, durch Zuſammenſetzung oder Theilung der letztern, entſtehen könne. Es ſey die gegebene Verhältniß p: 1 (wo q = 1 geſetzt wird) und n: 1 ſey die einfache Grundverhältniß, die Einheit, aus welcher man p: 1 meſſen will; ſo iſt, wenn $p : 1 = (n : 1)^m$ befunden wird, die gegebene Verhältniß p: 1 aus m Verhältniſſen, jede wie n: 1, zuſammengeſetzt, (die mtiplicata von n: 1) oder m iſt der Logarithme von p: 1 und alſo auch, auf den Fall, der Logarithme von $\frac{p}{1}$ oder von der Zahl p. Für $p : 1 = (n : 1)^{\frac{1}{m}}$ wäre p: 1 nur $\frac{1}{m}$ mal ſo groß wie n: 1 (die ſub-mtiplicata von n:1) oder $\frac{1}{m}$ wäre der Logarithme von p: 1 oder von der Zahl p. Bey der Hyperbel werden die geometriſchen Verhältniſſe durch die Abſciſſen auf der Aſymptote, alſo durch gerade Linien, ausgedrückt, zu denen die anliegenden aſymptotiſchen Räume als Logarithmen gehören,

ren, die ſich auf das eingeſchriebene Parallelogramm BK (114) oder den Model als eine beſtändige Größe oder Einheit beziehen. Man begreift leicht, daß das, was hier von der Hyperbel, in Abſicht auf die Logarithmen geſagt worden iſt, ſich auch auf alle Arten von Gröſſen anwenden laſſe, und daß überhaupt jede Linie, jede Fläche, jede ausgedehnte Größe, jede Zahl u. ſ. w. den Logarithmen einer angenommenen Grundverhältniß n : m vorſtellen könne; ſo daß l, 2 l, 3 l, 4 l, &c. als Maaße oder Logarithmen der Verhältniſſe $\frac{n}{m}$; $\frac{n^2}{m^2}$; $\frac{n^3}{m^3}$; $\frac{n^4}{m^4}$; &c. anzuſehen ſind, wenn einmal l zum Maaße der als einfach betrachteten Verhältniß n : m angenommen worden iſt. Bey der logarithmiſchen Linie z. E. deren Gleichung $y = c^x$ (Anal. 213. II.) für die Grundverhältniß c : 1 iſt, werden die Verhältniſſe oder Zahlen in einer geometriſchen Reihe der Ordinaten c^x, die Logarithmen hingegen in einer arithmetiſchen Reihe der Abſciſſen x vorgeſtellt. Die Verbindung beyder Reihen giebt hier ein logarithmiſches Syſtem, deſſen Model die beſtändige Subtangente = 1 der logarithmiſchen Linie, und c die Baſis iſt; denn dasjenige Glied der geometriſchen Reihe, oder die Zahl, zu welcher der Logarithme 1 gehöret, wird die Baſis oder das Fundamentalglied des Syſtems genennt, weil dadurch beſtimmt wird, was für Logarithmen zu den Verhältniſſen oder Zahlen gehören. Die Verhältniß eines ſolchen Fundamentalgliedes zur Einheit, wird vom Coteſius die Modularverhältniß genennt. Sie iſt mit derjenigen Verhältniß, deren Logarithme dem Model des Syſtems gleich iſt, einerley; und dieſe iſt für jedes Syſtem eine und eben dieſelbe, alſo eine beſtändige Verhältniß.

Dieſe Elementarbegriffe, die größtentheils aus den Anfangsgründen bekannt ſind, muß man bey Betrachtung und Behandlung der Logarithmen immer gegenwärtig haben.

118.

118. Zuſ. 6. Weil BPMD = Log. (CP: CB) (114) ſo iſt PpmM = el. Log. (CP: CB) = PM. Pp $= \frac{BK}{CP} . Pp = BK. \frac{\text{elem. CP}}{CP}$ d. i $\alpha\beta$. ſin. k. $\frac{e}{\alpha + x}$, wenn Pp = e geſetzt wird. Alſo iſt die Summe aller dieſer Elemente, oder BPMD d. i. Log. (CP: CB) = $\alpha\beta$. ſin. k $(\frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{x^3}{3\alpha^3} \ldots)$ [111] oder BK. $\int(\frac{\text{elem. CP}}{CP}) = M(\frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{x^3}{3\alpha^3} \ldots)$ wenn man den Model BK oder $\alpha\beta$. ſin. k = M ſetzt. Das Element des Logarithmen einer Größe iſt alſo dem Elemente dieſer Größe, durch die Größe ſelbſt dividirt, gleich; folglich Elem. log. $y = \frac{e}{y}$; Elem. $l(\alpha \pm z) = \pm \frac{e}{\alpha \pm z}$; und umgekehrt: $\int(\frac{e}{y}) =$ log. y; $\int(-\frac{e}{x}) = -$ log. x = log. $\frac{1}{x}$; $\int(\pm \frac{e}{\alpha \pm z})$ = log. $(\alpha \pm z)$; wo e immer das Element der im Diviſor befindlichen veränderlichen Größe bedeutet; und alſo (67. u. 87. Ex. 3.) hierdurch ergänzt wird. Wenn alſo el. log. (CP: CB) = $\frac{BK}{CP}$. Pp, ſo iſt Pp: CP = el. Log. (CP: CB): BK, welches zu Erfindung des Models M = BK gebraucht werden kann.

119. Zuſ. 7. Den Raum BPMD in den beyden Axen a, c, der Hyperbel auszudrücken, ſetze man BK oder $M = \frac{a^2 + c^2}{16}$ ſin. k. (114) ſo kommt El. BPMD

oder PM. Pp d. i. BK. $\frac{Pp}{CP} = \frac{a^2 + c^2}{16}$ ſin. k $\frac{el. CP}{CP}$;
wo CP als eine Zahl anzuſehen iſt. Nimmt man nun für ſelbige CB = α zur Einheit an: ſo giebt die Summ aller $\frac{el. CP}{CP}$, oder $\int(\frac{pP}{CP})$ den Logarithmen von $\frac{CP}{CB}$,

(118) woraus BPMD = $\frac{a^2 + c^2}{16}$. ſin. k. Log. $\frac{CP}{CB}$ folgt.

Für die gleichſeitige oder rechtwinklichte Hyperbel, wäre ſin. k = 1; a = c; und die aſymptotiſche Fläche BPMD = $\frac{a^2}{8}$. log. $\frac{CP}{CB} = \frac{a^2}{8}$. log. $\left(\frac{\alpha + x}{\alpha}\right)$ = DCM, dem zugehörigen hyperboliſchen Ausſchnitte.

Für x = o, wird die gefundene Fläche = $\frac{a^2}{8}$. log. $\frac{\alpha}{\alpha}$ = $\frac{a^2}{8}$. log. 1. verſchwinden, weil log. 1 = o, daß alſo hier keine Conſtans weiter hinzu zuthun iſt.

120. Zuſ. 8. Wenn man in dem Verhältniſſe CP: CB; CB oder α = 1 ſetzt, ſo kann CP jede poſitive, ganze oder gebrochene Zahl vorſtellen, weil CP auch kleiner als CB angenommen, alſo auch BP = — x werden kann. Alsdenn wird BPMD = log. (CP: 1) = log. CP = l (1 + x) und

$$\text{Log.} (1 + x) = M \left(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 \ldots\right)$$

(111) Für ein negatives BP, zwiſchen B und C, darf man nur in die vorhergehende Reihe — x ſtatt + x ſetzen, oder die ungeraden Potenzen von x mit entgegen geſetzten Zeichen ſchreiben, ſo kommt

Log.

Log. $(1 - x) = M(- x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \ldots)$ alſo negativ, wie es für einen Bruch ſeyn muß. Hier nun wird, weil Log. $1 = 0$; in beyden Fällen, für $x = 0$, auch log. $(1 + x)$; $l(1 - x)$; ſo wie die dieſen Logarithmen zugehörigen Reihen, gleich Null, daß alſo beyde Reihen, ohne Zuthuung einer beſtändigen Größe, vollſtändig ſind. Setzt man hier $x = \frac{z}{\alpha}$ ſo kommt

$$\text{Log.}\left(\frac{\alpha \pm z}{\alpha}\right) = M\left(\pm \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2\alpha^2} \pm \frac{z^3}{3\alpha^3} - \frac{z^4}{4\alpha^4} \ldots\right)$$

oder $\text{Log.}(\alpha \pm z) - \text{Log.}\,\alpha = M\left(\pm \frac{z}{\alpha} - \frac{z^2}{2\alpha^2} \pm \frac{z^3}{3\alpha^3} - \frac{z^4}{4\alpha^4} \ldots\right)$

und $\text{Log.}(\alpha \pm z) = \text{Log.}\,\alpha + M\left(\pm \frac{z}{\alpha} - \frac{z^2}{2\alpha^2} \pm \ldots\right)$

121. Zuſ. 9. Wenn in einer Hyperbel der Model $M = 1$ geſetzt wird, ſo werden die aſymptotiſchen Räume, die ſich auf dieſen Model beziehen, natürliche Logarithmen der anliegenden Verhältniſſe (denn die Vorausſetzung von $M = 1$ iſt unter allen die einfachſte und natürlichſte) auch hyperboliſche Logarithmen genennt; nicht deswegen als ob nur das natürliche, nicht auch die andern logarithmiſchen Syſteme, ſich durch die Hyperbel darſtellen ließen, ſondern weil die natürlichen Logarithmen mit der Quadratur der Hyperbel zuſammenhängen. In dem Verſtande iſt BPMD der natürliche Logarithme der Verhältniß CP: 1 oder $(1 + x)$: 1 oder der Zahl $1 + x$; alſo BPMD oder

Log. hyp. $(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \ldots$

und eben ſo

$$\text{Log. hyp. } (1-x) = -(x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 \ldots)$$

und

$$\text{Log. hyp. } (\alpha + x) = \log.\alpha + \frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{x^3}{3\alpha^3}$$

$$- \frac{x^4}{4\alpha^4} \ldots = \log.\alpha + \frac{x}{\alpha + \frac{1}{2}x} * + \frac{x^3}{12\alpha^3} + \ldots$$

wie daraus erhellet, wenn man $\frac{x}{\alpha + \frac{1}{2}x}$ wirklich dividirt, $\frac{x^3}{12\alpha^3}$ zu dem Quotienten addirt, und das Reſultat davon, mit den erſten Gliedern des vorigen Werthes vergleicht. Verlangt man nur wenige Decimalen des Logarithmen, nur die erſtern genau, ſo werden dieſelben aus Log. hyp. $(\alpha + x) = \log.\alpha + \frac{x}{\alpha + \frac{1}{2}x}$ ſchon hinlänglich berichtiget.

Die natürlichen Logarithmen pflegt man insgemein auch Nepperiſche Logarithmen zu nennen, wiewohl dieſe mit jenen nicht völlig überein kommen; worüber man Hr. Karſten in ſeinem vortrefflichen Lehrbegriffe der geſammten Mathematik 2. Theil S. 146. 147. nachleſen kann.

122. Zuſ. 10. Die aſymptotiſchen Räume hingegen, für welche der Model M größer oder kleiner als 1 angenommen wird, geben die künſtlichen Logarithmen; und obzwar die Syſteme dieſer Logarithmen ſo verſchieden, als die Hyperbeln ſelbſt gegen einander ſeyn können: ſo laſſen ſie ſich doch alle in einer und eben derſelben Hyperbel darſtellen, nach der verſchiedenen Benennung, die man dem

Model

Model oder dem eingeſchriebenen Parallelogramme giebt. Die gewöhnlichen Briggiſchen Logarithmen der berechneten Tafeln gehören zu den künſtlichen; denn da man gleich anfangs die Logarithmen blos zu Abkürzung der beſchwerlichſten arithmetiſchen Operationen brauchte; ſo fand man die berechneten Nepperiſchen nicht bequem genug dazu, deswegen verfertigte Brigge, auf Neppers Anrathen, ein anderes Syſtem, von der Grund-Verhältniß 10 : 1, welches mit der eingeführten Decimal-Eintheilung der Zahlen beſſer harmonirt als die übrigen. Seitdem man aber, auſſer dieſem Vortheile, die logarithmiſchen Größen auch ſelbſt zu brauchen genöthiget worden iſt, indem viele Aufgaben gerade zu darauf führen: ſo haben die hyperboliſchen oder natürlichen Logarithmen nun angefangen unentbehrlich zu werden.

123. Zuſ. 11. Von A, dem Scheitel der rechtwinklichten Hyperbel GAMN (Fig. 24.) [denn das natürliche Logarithmen-Syſtem läßt ſich unter allen Hyperbeln in der rechtwinklichten am deutlichſten darſtellen] fälle man auf die Aſymptote CQ, den Perpendikel $AB = 1$; ſo iſt $CB = CI = AB = 1$, die Seite der Hyperbelpotenz BAIC, die hier zugleich den Model $M = 1$ abgiebt. Wüßte man nun $BP = x$ ſo zu beſtimmen, daß $ABPM = BAIC = M = 1$ würde: ſo wäre die Abſciſſe CP, und mit ihr die Zahl $\frac{CP}{CB} = 1 + x$, oder diejenige Zahl, zu welcher die aſymptotiſche Fläche $ABPM = 1$, als Logarithme gehörte, und alſo die Baſis oder das Fundamentalglied (117.) des natürlichen Logarithmenſyſtems gefunden, auf welchem die Beſchaffenheit und Einrichtung des ganzen Syſtems beruhet. Man ſetze $\text{Log.}\,(1+x) : 1 = L$, ſo iſt (120)

 L = M

$L = M\,(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \ldots)$ alſo durch Umkehrung dieſer Reihe (Alg. 690. ſeqq.)

$$x = \frac{L}{M} + \frac{L^2}{1.2.M^2} + \frac{L^3}{1.2.3.M^3} + \frac{L^4}{1.2.3.4.M^4} \ldots$$

folglich iſt

$$\overline{1+x}:1 = (1 + \frac{L}{M} + \frac{L^2}{1.2.M^2} + \frac{L^3}{1.2.3.M^3}$$

$+ \frac{L^4}{1.2.3.4.M^4} \ldots) : 1$, die Verhältniß, deren Logarithme L iſt, und für den angenommenen Fall, d. i. für das natürliche Logarithmen-Syſtem, in welchem $L = M = 1$,

$$1 + x = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}$$

$+ \frac{1}{1.2.3.4.5} \ldots = 2,718281828459045 2 \ldots$ die Verhältniß dieſer Zahl, oder der Baſis zur Einheit, oder $2,718281828 \ldots : 1$, d. i. $1 : 0,367879441 \ldots$ giebt das Modularverhältniß (117.) des natürlichen Logarithmen-Syſtems.

124. Aufg. 22. **Den natürlichen Logarithmen einer Zahl, die kleiner iſt als 2. zu finden.**

Aufl. In eine der beyden Reihen (121) für Log. $(1+x)$; Log. $(1-x)$ ſubſtituire man in x einen ſolchen Werth, daß $1+x$, oder $1-x$, der gegebenen Zahl, deſſen Logarithmen man ſucht, gleich ſey, ſo giebt die Summe einer beträchtlichen Anzahl von Gliedern, den Logarithmen um ſo genauer, je kleiner x gegen 1 iſt; denn

wenn

wenn die Reihen (121) convergiren ſollen, ſo muß $x < 1$, alſo $1+x < 2$ ſeyn. Dies rechtfertigt die Einſchränkung des Satzes.

125. Exemp. Für den Logarithmen des Verhältniſſes 4 : 3, oder $\frac{4}{3}$: 1; d. i. der Zahl $\frac{4}{3}$, wäre, $x = \frac{1}{3}$ geſetzt, Log. $(1+x)$ oder

$$\text{Log.}\,\frac{4}{3} = \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{3\cdot 3^3} - \frac{1}{4\cdot 3^4} +$$

$$\frac{1}{5\cdot 3^5} - \frac{1}{6\cdot 3^6} + \frac{1}{7\cdot 3^7} - \frac{1}{8\cdot 3^8} \ldots = \text{Log.}\,(4:3)$$

Man löſe alſo $\frac{1}{3}$ in einen Decimalbruch auf, und dividire ihn mit 3, den Quotienten wieder mit 3, und ſo weiter fort, nach dem man viel oder wenig Glieder ſummiren will: ſo geben die, auf ſo eine Art gefundenen Zahlen, in ihrer Ordnung mit 1; 2; 3; 4; ꝛc. dividirt, die einzelnen Glieder der Reihe und ihre algebraiſche Summe den geſuchten Logarithmen. Nun iſt

$\frac{1}{3} = 0,333333333 \ldots = A$ oder $0,333333333 = \frac{A}{1} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3^2} = 0,111111111 \ldots = B$ und $0,055555555 = \frac{1}{2}B = \frac{1}{2\cdot 3^2}$

$\frac{1}{3^3} = 0,037037037 \ldots = C$ - $0,012345679 = \frac{1}{3}C = \frac{1}{3\cdot 3^3}$

$\frac{1}{3^4} = 0,012345679 \ldots = D$ - $0,003086419 = \frac{1}{4}D = \frac{1}{4\cdot 3^4}$

$\frac{1}{3^5} = 0,004115226 \ldots = E$ - $0,000823045 = \frac{1}{5}E = \frac{1}{5\cdot 3^5}$

 $\frac{1}{3^6}$

$\frac{1}{3^6} = 0,001371742.. = F$ und $0,000228623 = \frac{1}{6}F = \frac{1}{6.3^6}$

$\frac{1}{3^7} = 0,000457247.. = G$ - $0,000065321 = \frac{1}{7}G = \frac{1}{7\cdot 3^7}$

$\frac{1}{3^8} = 0,000152415.. = H$ - $0,000019051 = \frac{1}{8}H = \frac{1}{8\cdot 3^8}$

$\frac{1}{3^9} = 0,000050805.. = I$ - $0,000005645 = \frac{1}{9}I = \frac{1}{9\cdot 3^9}$

$\frac{1}{3^{10}} = 0,000016935.. = K$ - $0,000001693 = \frac{1}{10}K = \frac{1}{10.3^{10}}$

$\frac{1}{3^{11}} = 0,000005645.. = L$ - $0,000000513 = \frac{1}{11}L = \frac{1}{11.3^{11}}$

$\frac{1}{3^{12}} = 0,000001881.. = M$ - $0,000000161 = \frac{1}{12}M = \frac{1}{12.3^{12}}$

alſo $A + \frac{1}{3}C + \frac{1}{5}E + \frac{1}{7}G + \frac{1}{9}I + \frac{1}{11}L - (\frac{1}{2}B + \frac{1}{4}D + \frac{1}{6}F + \frac{1}{8}H + \frac{1}{10}K + \frac{1}{12}M) = \text{Log.}\ \frac{4}{3} = 0,\ 2876820.\ 34$ bis auf 7, Decimalſtellen vollkommen genau. Dieſer Logarithme negativ genommen, wäre der Logarithme des Verhältniſſes 3 : 4 oder $\frac{3}{4}$: 1 oder der Zahl $\frac{3}{4}$.

Eben ſo käme $x = \frac{1}{3}$ in Log. $(1 - x)$ ſubſtituiret, Log. $(1 - x)$ oder

$$\text{Log.}\ \frac{2}{3} = -(\frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{4\cdot 3^4} + \frac{1}{5\cdot 3^5}$$

$+ \ldots) = -(A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D \ldots + \frac{1}{12}M) = -0,\ 405465.038 = \text{Log.}\ (2 : 3)$ Dieſer Logarithme poſitiv genommen, wäre der Logarithme des Verhältniſſes 3 : 2 oder $\frac{3}{2}$: 1, d. i. der Logarithme der Zahl $\frac{3}{2}$.

In

In beyden Reihen muß man hier viel Glieder berechnen, wenn man den Logarithmen auf wenige Decimalen genau haben will; und die Logarithmen der Zahlen über 2. findet man durch ſie gar nicht, weil die Reihen alsdenn divergiren. Dieſer Unbequemlichkeit wird durch nachſtehende Aufgabe mit ihren Zuſätzen abgeholfen.

126. Aufg. 23. Die natürlichen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10; durch eine Reihe zu finden, die geſchwinder convergirt als die beyden vorigen.

Aufl. Weil (120) $\text{Log.}\,(\alpha+x) = l\,\alpha + M\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{x^3}{3\alpha^3} \ldots\right)$ und $\text{Log.}\,(\alpha - x) = l\,\alpha - M\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{x^3}{3\alpha^3} \ldots\right)$ ſo iſt $L\,(\alpha+x) - L\,(\alpha - x)$

oder $L\left(\frac{\alpha + x}{\alpha - x}\right) = 2\,M\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{x^3}{3\alpha^3} + \frac{x^5}{5\alpha^5} + \frac{x^7}{7\alpha^7} \ldots\right)$ und für $\alpha = 1$;

$$L\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\,M\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \ldots\right)$$

allgemein für jedes Syſtem. Für das natürliche iſt auch $M = 1$ alſo

$$L\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \ldots\right)$$

Nun ſey $\frac{1+x}{1-x} = n$, einer willkührlichen ganzen Zahl, deren Logarithmen man ſucht, ſo iſt $x = \frac{n-1}{n+1}$; ein eigentlicher Bruch, und die Reihe für $L\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, deren Glieder von zween zu zween Graden ſteigen, wird um ſo ſchneller convergiren, je kleiner n iſt, und ſo kann man den Logarithmen jeder gegebenen ganzen Zahl n, aus $L\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ allemal unmittelbar finden, weil die Reihe dafür niemals divergirt ſo groß auch n iſt.

Für $x = \frac{1}{n}$, wäre $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n-1}$, ſo wie für $x = \frac{1}{2n}$ die Zahl $\frac{1+x}{1-x} = \frac{2n+1}{2n-1}$, alſo in beyden Fällen ein Afterbruch, wo die Reihe für ein größeres n ſich ſchneller nähert. Dieſes dient, die Logarithmen ſolcher Brüche durch Reihen zu finden, die ſehr ſchnell convergiren, aus denen man nachher die Logarithmen gröſſerer Zahlen geſchwind haben kann. Man ſetze z. E. $x = \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \frac{1}{9}; \frac{1}{13}$; ſo giebt die Reihe für Log. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ die Logarithmen von $\frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \frac{7}{6}$; viel geſchwinder als die beyden Reihen in (125) und ſo findet man aus dieſen Logarithmen unzählig andere. Wenn alſo

Log. $\frac{3}{2} = 0{,}4054651\ldots$ Log. $\frac{4}{3} = 0{,}2876820\ldots$;

[125]

Log.

$\text{Log.} \frac{5}{4} = 0,2231435 \ldots \text{Log.} \frac{7}{6} = 0,1541506 \ldots$

ſo iſt

$$\text{Log. Nat. } 1 = 0,\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000 = \text{Log. } 1.$$

$$\text{Log.} \tfrac{3}{2} + \text{Log.} \tfrac{4}{3} = 0,\ 69314\ 71805\ 59945\ 30941\ 72321 = \text{Log. } 2.$$

$$\text{Log.} \tfrac{3}{2} + \text{Log. } 2 = 1,\ 09861\ 22886\ 68109\ 69139\ 52452 = \text{Log. } 3.$$

$$2 \text{ Log. } 2 = 1,\ 38629\ 43611\ 19890\ 61883\ 44642 = \text{Log. } 4.$$

$$\text{Log.} \tfrac{5}{4} + \text{Log. } 4 = 1,\ 60943\ 79124\ 34100\ 37460\ 07593 = \text{Log. } 5.$$

$$\text{Log. } 2 + \text{Log. } 3 = 1,\ 79175\ 94692\ 28055\ 00081\ 24773 = \text{Log. } 6.$$

$$\text{Log.} \tfrac{7}{6} + \text{Log. } 6 = 1,\ 94591\ 01490\ 55313\ 30510\ 54639 = \text{Log. } 7.$$

$$3 \text{ Log. } 2 = 2,\ 07944\ 15416\ 79835\ 92825\ 16964 = \text{Log. } 8.$$

$$2 \text{ Log. } 3 = 2,\ 19722\ 45773\ 36219\ 38279\ 04905 = \text{Log. } 9.$$

$$\text{Log. } 2 + \text{Log. } 5 = 2,\ 30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914 = \text{Log. } 10.$$

Die Logarithmen dieſer Zahlen, ſo weit berechnet, ſind aus Hrn. Eulers Introd. ad Anal. infin. P. I. §. 123. genommen.

127. Zuſ. 1. Auf dieſe Art kann man die Logarithmen aller Zahlen, ſelbſt der Primzahlen, immer ſo genau finden, als es die vorhabende Abſicht verlangt. Man kann auch hierzu die bereits gefundenen Logarithmen mit Vortheil gebrauchen. Denn wenn man den Logarithmen von

von α hat, ſo findet man hieraus (120) den natürlichen

$$L(\alpha \pm x) = \text{Log.}\,\alpha \pm \frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} \pm \frac{x^3}{3\alpha^3} - \frac{x^4}{4\alpha^4} \ldots$$

oder, wenn ſich dieſe Reihe noch zu langſam nähert,

$$L(\alpha + x) = L(\alpha - x) + 2\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{x^3}{3\alpha^3} + \frac{x^5}{5\alpha^5} + \frac{x^7}{7\alpha^7} \ldots\right)$$

128. Exemp. Für $\alpha = 10$; $x = 1$, wäre der Primzahl 11 Logarithme, oder

$$\text{Log.}(10+1) = \text{Log.}(10-1) + \frac{2}{10} + \frac{2}{3 \cdot 10^3} + \frac{2}{5 \cdot 10^5} + \frac{2}{7 \cdot 10^7} \ldots \text{ d. i.}$$

$$\begin{array}{lcr}
\text{Log. } 9 & = & 2,\ 1972245773362193825 60 \ldots \\
\frac{2}{10} & = & 0,\ 2000000000000000000000 \ldots \\
\frac{2}{3 \cdot 10^3} & = & 6666666666666666666 \ldots \\
\frac{2}{5 \cdot 10^5} & = & 40000000000000000 \ldots \\
\frac{2}{7 \cdot 10^7} & = & 285714285714 28 \ldots \\
\frac{2}{9 \cdot 10^9} & = & 222222222222 \ldots \\
\frac{2}{11 \cdot 10^{11}} & = & 1818181818 \ldots \\
\frac{2}{13 \cdot 10^{13}} & = & 15384615 \ldots
\end{array}$$

Log.

$$\frac{2}{15 \cdot 10^{15}} = \qquad 133333 \ldots$$

$$\frac{2}{17 \cdot 10^{17}} = \qquad 1176 \ldots$$

$$\frac{2}{19 \cdot 10^{19}} = \qquad 10 \ldots$$

---

alſo Log. Nat. 11. = 2, 3978952727983705438·28 . . .

128. Zuſ. 2. Hyperboliſche (121) oder natürliche Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100; ingleichen der Zahlen von 1 bis 10, nach allen 100ten Theilen, findet man bis auf 7. Decimalſtellen berechnet, in des großen Berliner Geometrae Hrn. Lamberts Zuſätzen zu den logar. und trigon. Tabellen Tab. 13. 15. Die erſtere Tafel hat Herr Lambert ſelbſt, die letztere der Engländer Simpſon berechnet, und kann ſelbige nach Hrn. Lamberts Erinnerung zugleich als eine Logarithmen-Tafel der Zahlen von 100. bis 1000. gebraucht werden, wenn man zu den Simpſon. Logarithmen den Log. 100 = 4, 6051702 addirt, ſo iſt z. E. Log. 2, 91 + 4, 6051702 = Log. 291.

129. Zuſ. 3. Durch Hülfe dieſer Tafeln kann man auch die Logarithmen ſolcher Zahlen finden die zwiſchen zwo nächſt auf einander folgende ganze Zahlen fallen, und dabey die erſte Formel (127) gebrauchen. Denn weil

$$\text{Log.}\,(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} \ldots = la + \frac{x}{a+\frac{1}{2}x} + \frac{x^3}{12a^3} \ldots (121)$$ ſo iſt es ſchon hinlänglich

L (a+x)

$L(\alpha + x) = l\,\alpha + \frac{x}{\alpha + \frac{1}{2}x}$ zuſetzen, wenn man den Logarithmen der Zahl nur in wenigen Decimalen verlangt. Geſetzt man wollte den Logarithmen von 3, 1415926 ... dem berechneten Umfange des Kreiſes, ſuchen: ſo nehme man aus der 15. Tabelle den Logarithmen von 3, 14; ſo iſt alsdenn $\alpha = 3, 14$; $x = 0, 0015926$; und $\frac{1}{2}x = 0, 0007963$, alſo $\frac{x}{\alpha + \frac{1}{2}x} = \frac{0, 0015926}{3, 1407963} = 0,0005071$ und hierzu Log. 3, 14 = 1, 144227 aus der Tafel addirt, kommt Log. 3, 1415926 = 1, 1447298 .. für dieſe Decimalen genau.

130. Aufg. 24. Die Zahl zu finden, die *einem* gegebenen hyperboliſchen Logarithmen zugehört.

Aufl. Weil Log. hyp. $(\alpha + x) = \log.\,\alpha + \frac{x}{\alpha + \frac{1}{2}x}$ (121) ſo iſt $\log.(\alpha + x) - \log.\,\alpha = \frac{x}{\alpha + \frac{1}{2}x} = \delta$, der Differenz beyder Logarithmen, und $x = \frac{\alpha\delta}{1 - \frac{1}{2}\delta}$. Nun kann man die Zahl, die dem gegebenen Logarithmen zugehört, immer als eine zweytheilige Zahl $\alpha + x$ anſehen, von welcher man den erſten Theil α ſogleich haben kann, indem man für log. α denjenigen Logarithmen aus der Tafel nimmt, der dem log. $(\alpha + x)$ am nächſten kommt. Beyder Differenz giebt δ; und ſo findet man $\alpha + x = \alpha + \frac{\alpha\delta}{1 - \frac{1}{2}\delta} = \frac{\alpha(1 + \frac{1}{2}\delta)}{1 - \frac{1}{2}\delta}$. Iſt der gegebene Logarithme, ohne Rückſicht auf das vorſtehende Zeichen, gröſſer als log. 10; ſo addirt oder ſubtrahirt man den Logarithmen

rithmen von 10, ſo oft, bis die Summe oder der Reſt kleiner iſt als log. 10, und erniedrigt oder erhöht ſodenn die Ziffern der gefundenen Zahl $\alpha + x$, auf ſo viel Decimalſtellen, ſo vielmal man anfänglich für den gegebenen negativen oder poſitiven Logarithmen, den Logarithmen von 10 dazu addirt, oder davon ſubtrahirt gehabt hat.

131. Expl. Es ſey der gegebene Logarithme = 4, 8546310, ſo ziehe man zuförderſt hiervon 2 log. 10 = 4, 6051702 ab, und ſetze den Reſt

$$0,2494608 = \log.(\alpha + x)$$

Nun iſt log. 1,28 = 0,2468600; (Lamb. T. 15.) = log. α;

alſo α = 1,28; und 0,0026008 $= l(\alpha + x) - l\,\alpha = \delta$

und 0,0013004 $= \frac{1}{2}\delta$

und $1 - \frac{1}{2}\delta = 0,9986996$;

$$\text{Folglich } \frac{\alpha\delta}{1 - \frac{1}{2}\delta} = \frac{0,003329024}{0,9986996} = 0,0033333.5\ldots = x$$

wo alle Zahlen, bis auf die letztere, zuverläßig ſind. Hieraus bekommt man $\alpha + x$ = 1, 2833333 .. oder die Zahl, die dem Logarithmen 0, 2494608 zugehört; und 128, 33333 . . . für die Zahl des gegebenen Logarithmen 4, 6051702. [130]

132. Zuſ. Insgemein kann man mit dieſer Regel zufrieden ſeyn, zumal wenn man die Zahl nicht auf viele Decimalſtellen genau verlangt. Man bedient ſich aber auch hierbey ſehr oft folgender Reihe

$$z = y\left(1 + \frac{\delta\, l\varepsilon}{1} + \frac{\delta^2 (l\varepsilon)^2}{1.\,2} + \frac{\delta^3 (l\varepsilon)^3}{1.\,2.\,3.} + \frac{\delta^4 (l\varepsilon)^4}{1.\,2.\,3.\,4.}\ldots\right)$$

Hier

Hier bedeutet z die zu ſuchende Zahl des gegebenen log. z; y die Zahl desjenigen Logarithmen der Tafel, der dem Logarithmen von z am nächſten kommt. Beyder Differenz, oder lz — ly giebt δ, und die Reihe wird um ſo ſchneller convergiren, je kleiner δ iſt. Für lε muß man hier immer den natürlichen Logarithmen der Baſis des logarithmiſchen Syſtems nehmen, zu welchem log. z gehört. Für hyperboliſche Logarithmen iſt alſo lε = 1; für das Briggiſche Syſtem hingegen lε = log. hyp. 10 = 2, 3025 .... Für. log. hyp. z = 0, 2494608 wäre log. y = 0, 2468600 und y = 1, 28 alſo log. z — log. y oder δ = 0, 0026008 dieſes giebt ſodann z = 1, 28 × (1+0,0026008+0,000003382 0+0,0000000029+..) = 1, 2833333.54 alſo die geſuchte Zahl nicht genauer wie vorhin (131) weil log. z wenig Decimalſtellen gehabt hat, und man auch nicht immer l y, und folglich auch lz — ly in vielen Decimalſtellen aus den Tafeln nehmen kann, wenn auch ſchon lz ſehr weit und genau gegeben wäre.

133. Aufg. 24. Aus dem gegebenen natürlichen Logarithmen L einer Zahl, den künſtlichen Logarithmen l eben derſelben Zahl eines andern Syſtems, deſſen Model m ſeyn ſoll, zu finden.

Aufl. Weil (125) log. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ d. i. $l = 2m \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots\right)$ alſo für m = 1, oder für das natürliche Syſtem, Log. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ oder $L = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots\right)$ ſo iſt L : l = 2 : 2m = 1 : m, und es verhalten ſich die Logarithmen einer Zahl aus verſchiedenen

nen Syſtemen, wie ihre Modeln (115.) auch iſt $l = mL$, oder, der künſtliche Logarithme (122) einer Zahl kommt heraus, wenn man den natürlichen Logarithmen eben derſelben Zahl mit dem Model des künſtlichen Syſtems multiplicirt. Weil nun die Reihe für Log. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ſich allemal nähert, (126) wie groß auch die Zahl $\frac{1+x}{1-x}$ iſt, ſo wird hierdurch die Bedenklichkeit gehoben, die Herr Hofrath Käſtnern (An. 229.) veranlaſſet hat, dieſen Satz aus andern Gründen herzuleiten (227. 228.) als diejenigen ſind, deren man ſich insgemein zu bedienen pflegt.

134. Exemp. In dem Briggiſchen Syſteme iſt 10; die Baſis, alſo (117) Log. Brigg. $10 = 1$. Um nun den Briggiſchen Logarithmen einer Zahl, aus dem gegebenen natürlichen Logarithmen derſelben Zahl, zu finden, darf man nur ſuchen, was man in 133 ſtatt m ſetzen müſſe, daß log. $10 = 1$ werde. Da nun $l = mL$, das iſt hier, log. Brigg. $10 = m$. Log. Nat. 10. ſo iſt

$$m = \frac{\text{Log. Brigg. } 10}{\text{Log. Nat. } 10} = \frac{1}{2,3025850\ldots}$$ oder, wenn man wirklich dividirt, $m = 0,434294481\ldots$ der Model des Briggiſchen Syſtems, womit man alſo den natürlichen Logarithmen einer Zahl multipliciren muß, (133) um den Briggiſchen Logarithmen derſelben Zahl, wie ſolcher in den gewöhnlichen Tabellen ſteht, zu finden. Eben ſo fände man den natürlichen Logarithmen einer Zahl, aus dem Briggiſchen, wenn man dieſen mit dem Quotienten $\frac{1}{0,43429\ldots}$ oder mit der Zahl $2,3025850\ldots$ multiplicirte.

135. Zuſ. Ueberhaupt, wenn die Modeln m, m′ zweener Syſteme gegeben ſind, ſo findet man aus einem gegebenen Logarithmen l des einen Syſtems, den zugehörigen Logarithmen l′ derſelben Zahl, in dem andern Syſteme ſogleich, wenn man den gegebenen Logarithmen l mit dem Quotienten $\frac{m'}{m}$ multiplicirt; und ſo iſt $l' = \frac{l\,m'}{m}$ und eben ſo $l = \frac{l'm}{m'}$, wenn l, m und l′ m′ zuſammen gehörige Größen bezeichnen.

136. Anm. Was bisher von den natürlichen Logarithmen geſagt worden iſt, kann hinlänglich ſeyn, ſich einen deutlichen Begriff von dieſem Syſteme zu machen, aus welchem die andern alle hergeleitet werden können, (135) und das man genau verſtehen muß, wenn man in dem höhern Calculo, beſonders bey den Exponentialgrößen, gut fortkommen will. Herr Hauſen, dem man hier größtentheils gefolgt iſt, hat hiervon Arithm. Prop. XXVII. und Sect. Con. Prop. L. ſo wie, nach ihm, Herr Karſten Math. Subl. Sect. XXI. ſehr ausführlich und ſchön gehandelt und zugleich den Zuſammenhang der Hyperbel mit der logarithmiſchen Linie (Hauſ. p. 281, 9.) und wie dieſe aus jener hergeleitet werden kann, erklärt. Die logarithmiſche Linie wird auch die Quadratrix der Hyperbel genennt, in ſo fern ſich zeigen läßt, daß die Quadratur der letztern von jener abhängt.

137. Die im vorhergehenden gezeigte Methode, krumme Linien zu quadriren, erſtreckt ſich übrigens nicht nur auf algebraiſche Linien, ſondern ſie läßt ſich eben ſo leicht auf tranſcendentiſche anwenden, wie ich in einigen Beyſpielen noch zeigen will, bey denen man zugleich ſehen wird, wie viel öfters die Betrachtung der Figur, oder auch der für

die

die Linie gegebenen Gleichung, darzu beyträgt, die Rechnung abzukürzen, und die dabey vorfallenden Schwierigkeiten zu erleichtern.

138. Aufg. 25. Die Fläche der gemeinen Cycloide AFBA (Fig. 25.) zu quadriren.

Aufl. Für den Halbmeſſer $AC = r$, iſt $Ad\delta B$, oder des beſchreibenden Kreiſes (circuli generatoris) halbe Peripherie $= Pr = BF$, und dieſes Kreiſes Innhalt oder $C = Pr^2$. Nun nehme man $Ad = B\delta$; $Ae = B\varepsilon$; $Ag = B\gamma$; u. ſ. w. ſo ſind nach der bekannten Eigenſchaft der Cycloide, die Kreißbogen oder Abſciſſen (x) Ad; Ae; Ag; $A\gamma$; $A\varepsilon$; $A\delta$; &c. den zugehörigen Ordinaten (y) db; ek; gf; $\gamma\varphi$; $\varepsilon\varkappa$; $\delta\beta$ &c. gleich, oder $x = y$; (Alg. 610.) ſo daß $db + \delta\beta = ek + \varepsilon\varkappa = gf + \gamma\varphi \ldots = Ad\delta B = BF = Pr$; alſo beſtändig und unveränderlich. Stellt man ſich nun in der Cycloidenfläche AFBA unendlich viel Ordinaten neben einander vor, die durchgängig um die unendlich kleine Diſtanz $DE = e$, von einander abſtehen: ſo iſt ihre Summe offenbar $= \frac{2r}{e}$, ſo vielmahl nämlich e in dem Durchmeſſer $AB = 2r$ enthalten ſeyn kann; alſo die Menge aller wie db, $\delta\beta$ u. ſ. w. zuſammen gehörigen Paare $= \frac{r}{e}$, der Hälfte von voriger Summe. Die Summe nun zweener ſolchen Ordinaten, in die gemeinſchaftliche Baſin e multiplicirt, giebt ein unendlich kleines Rechteck, wie $e(db + \delta\beta) = e.BF = e.Pr$, welchem die übrigen, auf gleiche Art beſtimmten, unendlich kleinen Rechtecke, durchgehends gleich ſind, indem alle BF zur Höhe, e zur Grundlinie haben. Das Product alſo von ePr in die

Summe $\frac{r}{e}$ aller Paare, oder $eP r\frac{r}{e}$, giebt die Fläche $AFBdA = Pr^2 = C$, dem beſchreibenden Kreiſe. Folglich iſt $AFB\delta dA + Ad\delta BA = C + \frac{1}{2}C = \frac{3}{2}C =$ AFBA, der halben Cycloide; und 2 AFBA, oder die ganze Cycloide $= 3C$, d. i. dreyen beſchreibenden Kreiſen gleich.

139. Zuſ. Für $Ad = u$; $AD = x$; $Db = y$; $Ac = r$; iſt, weil $Db = db + Dd = Ad + Dd$; ſodann $y = u + \sqrt{2rx - xx}$, eine andere Gleichung der Cycloide, in welcher die Abſciſſen, wie gewöhnlich, auf einer geraden Linie AB, nicht auf dem Umfange des beſchreibenden Kreiſes, genommen werden, die aber demohngeachtet tranſcendentiſch bleibt, weil u einen Cirkelbogen bezeichnet. Wollte man nun hier die Quadratur der Cycloide aus dem Flächen = Elemente $ey = e(u + \sqrt{2rx - xx})$ ſuchen, ſo müßte man zuvor den Bogen u in x ausdrücken, weil ſich e auf x bezieht, und alsdenn wie gewöhnlich verfahren. Die Vergleichung dieſes Verfahrens und der vorhergehenden Methode, wird zeigen, daß die erſtere weit kürzer ſey als die letztere.

140. Aufg. 26. Die archimedeiſche Spirale, CMBAC (Fig. 26.) zu quadriren.

Aufl. Wenn $CM = y$; der Kreisbogen $AP = x$; der Kreißumfang $APpA = p$ und $AC = CP = r$, geſetzt wird, ſo iſt $p : x = r : y$ oder $y = \frac{rx}{p}$, die Gleichung für die Archimedeiſche Spirale (Alg. 580.) in welcher die Ordinaten alle aus einem Puncte C gehen, den man den Pol der krummen Linie zu nennen pflegt. So wie es hier verſchiedene Theile der Spirallinie, nach

den

den verſchiedenen Umläufen des Halbmeſſers um den Pol C giebt (Alg. 594.) ſo heißt auch der zwiſchen dem Halbmeſſer CA und der krummen Linie CMBA enthaltene Raum CMBAC, die erſte Fläche, und das, zwiſchen dem Halbmeſſer CA, der krummen Linie CMBA 2M 2B 2A und der Verlängerung A2A des Halbmeſſers begränzte Stück CA2M2B2AA, die zweyte Fläche; die dritte Fläche fängt ſich an der Gränze A2A an, und endigt ſich mit 2A3A; (Fig. 27.) und ſo bey den übrigen, der Menge nach, unzähligen Flächen, weil ſich der Halbmeſſer CA durch Anſeƶung von A2A; 2A3A; 3A4A... = CA ohne Ende verlängern läßt.

Nun ſey (Fig. 26.) CMC die veränderliche erſte, der Abſciſſe $x = AP$ zugehörige Fläche, ſo fällt CMm, oder das Element dieſer veränderlichen Fläche, zwiſchen zween ähnliche Ausſchnitte von Kreiſen, die CM, Cm zu Halbmeſſern haben, ſo daß man, weil hier der Winkel MCm, und alſo der Bogen Mm unendlich klein angenommen wird, dieſes $CMm = \frac{1}{2} CM.MR$ ſeƶen kann, weil die Halbmeſſer CM, Cm weniger als jede angebliche endliche Größe beträgt, von einander unterſchieden ſind. Der Abſciſſe AP Element d. i. Pp, nenne man e, ſo geben die ähnlichen Sectoren beyder Kreiſe,

$CP(r): Pp(e) = CM(y): MR = \frac{ey}{r}$, alſo $\frac{1}{2}$ CM

$MR = \frac{ey^2}{2r} = \frac{erx^2}{2p^2}$, für das Flächen-Element der

Archimedeiſchen Spirale, und (66) $\frac{rx^3}{6p^2}$ oder

$\frac{py^3}{6r^2}$ für die veränderliche Fläche CMC ſelbſt, ohne

daß weiter etwas zu addiren, oder zu ſubtrahiren nöthig

 wäre,

wäre, weil der gefundene Werth der Fläche, für $x = 0$ oder $y = 0$ verſchwindet (85.)

141. Zuſ. 1. Für $x = p$, verwandelt ſich der Kreißbogen AP in den ganzen Umfang des Kreiſes, und CMC, oder $\frac{rx^3}{6p^2}$ wird nun für die ganze erſte Fläche CMB AC $= \frac{1}{6}pr$; folglich ſich zu dem Kreiſe APpA wie $\frac{1}{6}pr$: $\frac{1}{2}pr$ oder, wie 1 : 3 verhalten; alſo nur $\frac{1}{3}$ von dem Kreiſe ſeyn, in welchen die Spirallinie beſchrieben iſt.

Eben ſo findet man die Fläche für ein x das kleiner als p iſt. Im folgenden wird auch gezeigt werden, wie man für ein x das gröſſer iſt als p, die zugehörigen Flächen berechnen müſſe.

142. Zuſ. 2. Wenn man ſich die Erzeugung der Spirale, durch einen Punct (wie Alg. 592) vorſtellt, der auf dem beweglichen Halbmeſſer CA, von C an, gleichförmig dergeſtalt fortrückt, daß er die Länge CA in der Zeit durchläuft, in welcher dieſer Halbmeſſer mit gleichförmiger Bewegung ſeinen Kreis beſchreibt, ſo wird die fortgeſetzte gleichförmige Bewegung der verlängerten CA mit dem in ihr gleichförmig fortrückenden Puncte, bey den vorigen Geſchwindigkeiten, die zweyte, dritte u. ſ. w. Umwindung vollenden, und dadurch die zweyte, dritte u. ſ. w. Spiral-Fläche beſtimmen.

143. Zuſ. 3. Hierauf gründet ſich folgende Methode, jede verlangte ganze Spiralfläche, ſo wie jeden Theil derſelben, deren Abſciſſe ein gegebenes Stück des beſchreibenden Kreißumfanges p iſt, zu quadriren. Indem die umdrehende Linie CA (Fig. 27.) einen gewiſſen Bogen in der Peripherie p des beſchreibenden Kreiſes durchlaufen hat, hat der auf ihr oder ihrer Verlängerung, fortrückende Punct M, einen proportionellen Theil ſeines Halb-

Halbmeſſers r vollendet (142) daß alſo zu den Abſciſſen $\frac{1}{m}p$; $\frac{n}{m}p$; die Werthe von $\frac{1}{m}r$; $\frac{n}{m}r$; als Ordinaten gehören; $\frac{n}{m}$ mag nun eine ganze Zahl, ein eigentlicher oder uneigentlicher Bruch ſeyn. Für die Abſciſſe o iſt auch die Ordinate o, und wenn die umdrehende Linie bey dem Anfange ihrer Bewegung einen unendlich kleinen Kreisbogen $= \pi$ beſchreibt, ſo rückt auch der beſchreibende Punct um einen unendlich kleinen Theil ε des Halbmeſſers, auf dieſer Linie fort, ſo daß allemal $\pi : p = \varepsilon : r$. Die Ordinaten ε; 2ε; 3ε; $4\varepsilon \ldots y$; liegen alſo alle, um den gemeinſchaftlichen Pol C, dergeſtalt neben einander, daß jede zween, nächſt aufeinander folgende, einen Winkel machen, der den unendlich kleinen Kreißbogen π zum Maaße hat. Dieſe Ordinaten, als Halbmeſſer, beſtimmen die concentriſchen Kreiſe $P\varepsilon^2$; $4P\varepsilon^2$; $9P\varepsilon^2$; $16P\varepsilon^2$; .... Py^2; von denen die zugehörigen Flächen-Elemente der Spirale, durchgängig die $\frac{\varepsilon}{r}$ ten Theile ſind; und ſo erhält man von der erſten Ordinate ε an bis auf y, für alle neben einander liegende und immer um unendlich kleine Unterſchiede wachſende Flächen-Elemente, die Reihe: $\frac{\varepsilon}{r} . P\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon}{r} . 4P\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon}{r} . 9P\varepsilon^2 \ldots + \frac{\varepsilon}{r} . \left(\frac{y}{\varepsilon}\right)^2 P\varepsilon^2$ oder $\frac{P\varepsilon^3}{r}(1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots + \frac{y^2}{\varepsilon^2})$ weil y in der Reihe die $\frac{y}{\varepsilon}$ te Ordinate iſt. Die Summe (66) aller dieſer Elemente, giebt alsdenn

denn die geſuchte Spiralfläche $= \frac{P\varepsilon^3}{r} \cdot \frac{y^3}{3\varepsilon^3} = \frac{Py^3}{3r}$; oder $\frac{py^3}{6r^2}$, wenn man $\frac{p}{2r}$ ſtatt der Zahl P ſubſtituirt; welches dient, die gefundene Fläche ſogleich mit dem gleichvielbedeutenden Ausdrucke (141.) $\frac{rx^3}{6p^2}$ zu vergleichen, den man erhält, wenn man $\frac{rx}{p}$ ſtatt y in $\frac{py^3}{6r^2}$ ſetzt.

144. Zuſ. 4. Weil der Abſciſſe $x = \frac{n}{m}p$, die Ordinate $y = \frac{n}{m}r$ zugehört (143.) ſo darf man, die Fläche die ſich auf dieſe Abſciſſe oder Ordinate bezieht, zu quadriren, nur in eine der beyden Formeln $\frac{Py^3}{3r}$; $\frac{py^3}{6r^2}$; den gedachten Werth von y ſubſtituiren, ſo erhält man $\frac{Pn^3r^2}{3m^3}$; $\frac{pn^3r}{6m^3}$. So lange $\frac{n}{m} < 1$ oder auch $= 1$, findet ſich dabey keine Schwürigkeit, und im letztern Falle erhält man $\frac{1}{3}Pr^2$ oder $\frac{1}{6}pr$ wie (141) für die Quadratur der ganzen erſten Spiralfläche CMBAC. Wenn man aber die zweyte, dritte u. ſ. w. Fläche (140) berechnen will, für welche, wenn $m = 1$ angenommen wird, $n = 2$; 3; u. ſ. w. geſetzt werden muß: ſo muß man bedenken, daß weil hier in der Figur, bey mehrern Umwindungen, die Elementar-Sectoren, die alle ihren gemeinſchaftlichen Mittelpunct in C haben, neben und auf

auf einander zu liegen kommen, die Formel $\frac{Pn^3r^2}{3m^3}$, die ſich auf dieſe Vorausſetzung gründet, dieſe Flächen alle zu groß geben müſſe. Denn ob gleich bey der erſten Umwindung der Spirale um ihren Pol, die gedachte Formel nur allein die erſte Fläche giebt, ſo kommen doch bey der zweyten Umwindung, zu der erſten Fläche mit der zweyten, noch einmal die erſte, und bey der dritten Umwindung, zu den vorhergehenden Flächen mit der dritten, noch einmal die erſte, und zweyte aus der Formel hinzu; ſo daß hier bey der qten Umwindung, für welche $\frac{n}{m} = q$ geſetzt werden müßte, die Formel einen ſolchen Werth giebt, nach welchem, zu den Flächen bey der $(q-1)$ten Umwindung, noch die Summe aller Flächen von der erſten bis mit der qten hinzu kommt; woraus man ſehr leicht die Quadratur jeder verlangten Spiral-Fläche finden kann.

145. Zuſ. 5. Denn wenn man die Flächen, ſo wie ſie von der erſten an, in der Ordnung auf einander folgen, mit den Buchſtaben A, B, C, D, E ... bezeichnet, ſo kommt, wenn man durchgängig $m = 1$; aber n nach und nach $= 1; 2; 3; 4;$ u. ſ. w. ſetzt:

$$\tfrac{1}{3}Pr^2 = A = \tfrac{1}{6}pr;\ \frac{2^3}{3}Pr^2 = 2A + B = \frac{2^3}{6}pr;$$

$$\frac{3^3}{3}Pr^2 = 3A + 2B + C = \frac{3^3}{6}pr;\ \frac{4^3}{3}Pr^2 = 4A + 3B + 2C + D = \frac{4^3}{6}pr$$

u. ſ. w. und wenn Ψ die unbeſtimmte $(q-1)$te, Ω die qte Fläche bezeichnet:

ſo iſt $\frac{(q-1)^3}{3}$. $Pr^2 = (q-1)A + (q-2)B + (q-3)$ $C \ldots + \Psi = \frac{(q-1)^3}{6}\, pr$; und $\frac{q^3}{3}\, Pr^2 = qA +$ $(q-1)B + (q-2)C \ldots + 2\Psi + \Omega = \frac{q^3}{6}\, pr$; woraus man die Summe aller, von der erſten an bis mit der qten, auf einander folgenden Spiralflächen, ſogleich haben kann, wenn man von der letzten Formel die vorhergehende abzieht; dieſes giebt $\frac{q^3-(q-1)^3}{3}\, Pr^2$ d. i. $(q[q-1] + \frac{1}{3})\, Pr^2 = A + B + C + D \ldots + \Psi + \Omega =$ $(q[q-1] + \frac{1}{3})\, \frac{1}{2} pr$.

146. Zuſ. 6. Für $q=1$, kommt $A = \frac{1}{3} Pr^2 = \frac{1}{6} pr$; (145) und $B = 2\,Pr^2 = pr$, für $q = 2$. Alſo iſt B der doppelten Fläche des Kreiſes gleich, in welchen die Spirale beſchrieben worden iſt, und 6mal größer als A. Weil $\frac{1}{3} Pr^2 = A$, ſo folgt aus dem vorhergehenden: $q(q-1)\, Pr^2 = B + C + D \ldots + \Psi + \Omega$ und $q-1$ ſtatt q ſubſtituirt $(q-1)(q-2)\, Pr^2 = B + C + D \ldots + \Psi$; alſo iſt beyder Reihen Differenz, oder $(q-(q-2))$ $(q-1)\, Pr^2 = \Omega = 2\,(q-1)\, Pr^2$, der qten Fläche; oder für $2\,Pr^2$ ſeinen Werth B geſetzt, $\Omega = (q-1)\, B$; wo Ω jede Fläche, nur nicht A bedeuten kann, weil A in den beyden Reihen, deren Differenz man hier genommen hat, nicht mit befindlich iſt, folglich auch $(q-1)\, B$ für $q = 1$ verſchwindet. Alſo iſt jede dieſer Spiralflächen der zweyten Fläche ſo vielmal genommen gleich, als die um eins verminderte Zahl der Fläche beträgt alſo die zweyte Fläche $B = 1\,B$; die dritte $C = 2\,B$ die vierte $D = 3\,B$ u. ſ. w. Auf eben die Art verfährt man,

man, wenn man nur einen Theil von dieſen Flächen, nicht die ganzen Flächen quadriren will.

Zuſ. 7. Die Quadratur der Spirale, ſo wohl als der Cycloide, (138) ſetzt alſo die Quadratur des Kreiſes voraus, und läßt ſich dieſerhalb nicht geometriſch genau finden. Man begnügt ſich aber durchgehends, wenn man die Quadratur einer Fläche nicht genau geben kann, dieſelbe auf die Quadratur einer andern zu bringen, durch welche man jene finden kann, wenn dieſe gegeben iſt. Was übrigens hier von der Quadratur der Cycloide geſagt worden iſt, gilt nur von ihrer unbeſtimmten (60) Quadratur, die allemal tranſcendentiſch bleibt; aber das hindert nicht, daß nicht die beſtimmte Quadratur, für gewiſſe Stellen der Cycloide, einen algebraiſchen Raum ſollte geben können; wie bereits Hugenius bey der Cycloide, und andere nach ihm, auch bey andern krummen Linien gefunden haben.

148. Zuſ. 8. Für unzählige Spiralen, für welche

$p^n : r^n = x^m : y^m = \frac{r^n x^m}{p^n}$, oder $y = \left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{n}{m}} x$; darf

man nur den Werth von $y^2 = \left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{2n}{m}} x^2$, in das

vorhergefundene (140) Flächen-Element $\frac{e y^2}{2 r}$, ſubſtituiren, ſo findet ſich für dieſe Spiralen das Element

$$\tfrac{1}{2}\,CM.\,MR = \frac{e r^{\frac{2n - m}{m}} x^2}{2 p^{\frac{2n}{m}}};$$ und aus der Summe

(66) aller Elemente $\frac{r^{\frac{2n-m}{m}} x^3}{6 p^{\frac{2n}{m}}}$, oder

$\frac{x^3}{6} \sqrt[m]{\left(\frac{r^{2n-m}}{p^{2n}}\right)}$ die veränderliche erſte Fläche,

ſo daß ſich dieſe erſte ganze Fläche, zu der Fläche ihres

Kreiſes wie $1 : 3 \sqrt[m]{\left(\frac{r}{p}\right)^{2(m-n)}}$ verhält; und ſo

kann man, auf eine ähnliche Art, wie vorher geſchehen, auch die Quadratur der übrigen Flächen, oder einzelner Theile von ihnen, leicht finden.

149. Aufg. 27. AM (Fig. 28.) ſey ein Bogen einer krummen Linie, der durchgehends gegen ſeine Abſciſſe hohl oder erhaben iſt, und MT, die Tangente dieſes Bogens, habe mit ihm den unendlich kleinen Theil Mm gemein. Durch den Punct m ziehe man pm mit PM und πm mit AP, bis an die durch A aufgerichtete ſenkrechte Linie AΠ parallel, ſo daß Pp, $\Pi\pi$, die Elemente der zugehörigen AP, AΠ, und pM, πM oder Pm, Πm, die Flächen-Elemente von AMP, AMΠ ſind: Man ſoll die Verhältniß von Pm, Πm, den auf den hohlen und erhabenen Bogen ſich beziehenden Flächenelementen, finden.

Aufl. Aus den ähnlichen Triangeln TPM, MRm, folgt:

TP: PM = MR (Pp): Rm ($\Pi\pi$)

also RM oder $\Pi\pi = \frac{Pp. PM}{TP}$

und

$$\text{und weil } \Pi M = AP$$

$$\text{ſo iſt } \Pi\pi . \Pi M = Pp . PM \frac{AP}{TP}$$

$$\text{und } \Pi\pi . \Pi M : Pp . PM = \frac{AP}{TP} : 1 = AP : TP$$

---

oder $\pi M : pM = x : \text{ſubt. } AM$; wo die letzte Verhältniß, und dadurch auch die Verhältniß der Flächen-Elemente πM, pM, oder Πm, Pm, vermittelſt der Gleichung für die Linie, gegeben iſt, weil man die Subtangente für den Bogen AM aus (17. 21.) leicht haben kann.

150. Zuſ. Man kann die Puncte m auf dem Bogen AM ſo annehmen, daß die zugehörigen MR oder Pp durchgehends gleich groß und unveränderlich, die zugehörigen $\Pi\pi$ hingegen, veränderlich werden. Eben ſo können, im Gegentheil, die $\Pi\pi$ unveränderlich und die Pp veränderlich angenommen werden. Bey beyden Vorausſetzungen werden aber doch immer zween zuſammen gehörige Flächen-Elemente wie πM, pM, in der Verhältniß der correſpondirenden Abſciſſe AP (x) zur Subtangente bleiben. Aus der Vergleichung dieſer Flächen-Elemente, beſonders, wenn ihre Verhältniß, wie oft geſchieht, eine beſtändige Verhältniß iſt, kann man nun ſehr leicht die Quadratur einer krummen Linie finden; wie ſogleich gezeigt werden ſoll.

151. Aufg. 28. Die Quadratur unzähliger Parabeln, für welche $y^m = p^k x^n$, zu finden.

Aufl. Weil (Fig. 28.) $\pi M : pM = x : \text{ſubt. } AM$ (149) d. i. hier, $\pi M : pM = x : \frac{mx}{n}$ (21) $= 1 : \frac{m}{n}$,

oder

oder $\pi M : pM = n : m$, und die Verhältniß jeder ſolchen zuſammengehörigen Elemente hier dieſelbe (150) bleibt, was auch x iſt: ſo iſt auch die Summe aller πM d. i. $A\Pi M$, zu der Summe aller pM d. i. APM, in derſelben Verhältniß, (Eukl. 5. B. 12. S.) Folglich $A\Pi M$:

$APM = n : m$, und $A\Pi M = \frac{n}{m} APM$; $APM = \frac{m}{n}$

$A\Pi M$, alſo $A\Pi M + APM = \frac{n}{m} APM + APM =$

$\left(\frac{n}{m} + 1\right) APM = \frac{n+m}{m} APM = xy$; alſo APM

$= \frac{m}{n+m} xy$ und eben ſo $A\Pi M = \frac{n}{n+m} xy$

152. Exemp. Für $m = 2$; $n = 1 = k$; oder für die Apolloniſche Parabel, kommt $APM = \frac{2}{3} xy$; (80) $A\Pi M = \frac{1}{3} xy$ (77) Für die Neiliſche Parabel, wo $m = 3$; $n = 2$; $k = 1$; wäre $APM = \frac{3}{5} xy$; $A\Pi M = \frac{2}{5} xy$ u. ſ. w. bey den übrigen Parabeln, die ſich gleichfalls alle vollkommen quadriren laſſen. Ich enthalte mich, mehrere Anwendungen hiervon, auf andere krumme Linien, zu machen, weil die Sache keine Schwürigkeit hat. Vor andern iſt hier der Ausdruck

$$\Pi\pi . \Pi M = \frac{Pp . PM . AP}{TP} \text{ (149) d. i.}$$

$$\text{Elem. } A\Pi M = \frac{e x . PM}{\text{ſubt. } AM}$$ zu merken, wo ſich ſowohl

e als ſubt. AM auf x bezieht, in welcher Abſciſſe ſich auch PM aus der Gleichung ausdrucken läßt. Die Summe hiervon giebt ſodann die Fläche $A\Pi M$.

Sezte

Setzte man in den obigen Werth des Elementes von $A\pi M$, ſtatt des Quotienten $\frac{PM}{\text{Subt. } A}$, den gleichgelten-

den $\frac{mR}{MR}$ oder $\frac{\varepsilon}{e}$, ſo käme Elem. $A\pi M = \varepsilon x$, einer-

ley mit dem Flächenelemente (73) weil hier x die Ordinate für den erhabenen Bogen, ε das Element der zugehörigen Abſciſſe y dieſes Bogens bedeutet.

153. Anm. In (149) iſt angenommen worden, daß die Tangente einen unendlich kleinen Theil mit dem gegebenen Bogen gemein haben ſolle. Die Richtigkeit dieſer Forderung wird im Folgenden umſtändlich erwieſen werden.

III.

Von der

Rectification der Kegelſchnitte.

154. Erklärung.

Eine krumme Linie, oder einen Bogen von ihr, rectificiren, heißt, eine gerade Linie finden, die der gegebenen krummen Linie, oder ihrem Bogen, gleich iſt.

155. Aufg. 29. Eine allgemeine Formel für das Element Mm eines Bogens AM = A (Fig. 29.) einer krummen Linie zu finden.

Aufl. Wenn Pp ein Element der Abſciſſe AP iſt, ſo iſt Ap unendlich wenig von AP; und pm unendlich

wenig

wenig von PM; und Am unendlich wenig von AM unterſchieden: alſo Am — AM, oder Mm, ein Element des Bogens AM. So lange nämlich Pp noch eine endliche Größe hat, iſt auch das Bogenſtück Mm, um eine endliche Größe d, von dem geraden Stücke Mm auf der Tangente, verſchieden. Aber d, dieſer Unterſchied, kann unendlich abnehmen; denn die Sehne dieſes Bogens kann ihrem Bogen ſo nahe kommen, als man nur will. Indem dieſes aber geſchieht, wird auch der Winkel, den die Sehne des Bogens, bey M mit der Tangente TG macht, immer kleiner, dergeſtalt, daß für den unendlich kleinen Bogen Mm, dieſer Bogen mit ſeiner Sehne und dem Tangentenſtücke Mm in einander fallen. Man kann alſo das Bogenelement Mm als eine gerade obgleich unendlich kleine Linie, d. i. als einen unendlich kleinen Theil, Mm, der nach G zu verlängerten Tangente TM anſehen. Wenn alſo das Abſciſſenelement $Pp = e = MR$; das Ordinatenelement $mR = \varepsilon$, ſo findet man ſogleich für das Bogenelement Mm, aus den ähnlichen Triangeln TMP; MmR; MNP; folgende Proportionen:

1) $PT : TM = MR : Mm$ alſo $Mm = e. \dfrac{\text{Tang. A}}{\text{Subt. A}}$

2) $PM : MN = MR : Mm$ oder $Mm = e. \dfrac{\text{Norm. A}}{y}$

3) $PM : MT = mR : Mm$ oder $Mm = \varepsilon. \dfrac{\text{Tang. A}}{y}$

4) $PN : MN = mR : Mm$ oder $Mm = \varepsilon. \dfrac{\text{Norm. A}}{\text{Subn. A}}$

von welchen man ſich diejenige wählen kann, die nach Beſchaffenheit der vorkommenden Fälle die bequemſte iſt.

Die

Die 1ſte und 3te Proportion haben jedoch den Vorzug, daß man aus ihnen das Bogen-Element Mm, für ſchiefwinklichte Coordinaten ſo wie für rechtwinklichte, ſogleich ausdrücken kann, da die 2te und 4te Proportion nur allein für die letztern gelten. Endlich iſt auch, bey rechtwinklichten Coordinaten:

5) $Mm = \sqrt{MR^2 + mR^2} = \sqrt{e^2 + \varepsilon^2}$, mit den Werthen für Mm aus den vorhergehenden Proportionen einerley, wie daraus erhellet, wenn man die aus 1; und 3; ingleichen aus 2; und 4; zu findenden Werthe von e^2, ε^2, in den Irrationalausdruck für Mm ſubſtituirt. Dieſes Wurzelausdrucks bedient man ſich auch in dem höhern Calculo insgemein, als einer allgemeinen Formel für das Bogenelement einer gegebenen krummen Linie.

156. Anm. Die Forderung, daß die Tangente eines Bogens einen unendlich kleinen Theil deſſelben mit ihm gemein habe, läßt ſich ſowohl aus dem was gleich itzt geſagt worden iſt, als auch durch folgende Betrachtung rechtfertigen, die ich aus meiner Abhandlung über die Haupteigenſchaften der Kegelſchnitte §. XXXIV. kürzlich hier wiederholen will:

Wenn man ſich den Gang einer krummen Linie durch die Bewegung eines Punctes vorſtellt, der nach und nach in ihre verſchiedenen Stellen rückt, dergeſtalt, daß er ſeinen Weg beſtändig ändert, alſo in jeden Augenblicke von der Richtung des nächſt vorhergehenden Augenblickes abweicht: ſo kann man überall Puncte in der krummen Linie annehmen, und es wird kein endlicher beſtimmter Theil derſelben eine gerade Linie ausmachen. Wenn man aber die Stelle, in der ſich ein Punct itzt befindet, und die Stelle, in die er den nächſten Augenblick rückt, als eine Entfernung anſieht, die der Punct in der augenblicklichen Bewegung zurück legt: ſo hat es nichts widerſprechendes, ſich den Weg des Punctes in dieſer

Entfernung, als eine, obgleich unendlich kleine gerade Linie vorzuſtellen, weil ſich die Richtung des Punctes nicht ändern kann, wenn man nicht zugleich annimmt, daß er vorher, in dieſer kleinen Entfernung, eine gewiſſe feſtgeſetzte Richtung gehalten hat. Man kann alſo die krummen Linien als Polygone von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten betrachten, die blos durch die Winkel, die dieſe unendlich kleinen Seiten einſchließen, verſchieden ſind: und ſo iſt die Tangente TM (Fig. 29.) nichts anders, als eine endliche Verlängerung der unendlich kleinen Polygonalſeite Mm an dem gegebenen Puncte M; und dadurch (149. 155.) hinlänglich gerechtfertigt.

157. **Aufg. 30. Die Länge eines gegebenen Bogens AM = A einer krummen Linie zu finden.**

Aufl. Man drücke das Element Mm des Bogens A aus einer der (155) erwieſenen Formeln aus, in welche man die Werthe von Tang. A; Subt. A; Norm. A; Subn. A; in x oder y, aus dem vorigen Capitel überhaupt, für die Kegelſchnitte, und aus (21. 39.) beſonders, auch für andere krumme Linien ſubſtituirt, wobey man die Bedeutung (155) von e und ε nicht aus der Acht laſſen muß. Die Summe (66. 67.) aller Elemente, giebt die Länge des veränderlichen Bogens, in einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gliedern. Die Vollſtändigkeit dieſer Summe beurtheilt man hier, wie bey den Quadraturen, (85. 87.) indem man die Conſtans zu dem für einen gewiſſen Werth von x oder y verſchwindenden Bogen, zu beſtimmen ſucht, wenn ſelbiger nicht für x oder y = 0 ſelbſt Null wird.

158. **Aufg. 31. Die Neiliſche Parabel zu rectificiren, für welche $y^3 = px^2$ oder $y^3 = x^2$, wenn man den Parameter p = 1 ſetzt.**

Aufl. Aus (155) wähle man einen von den gefundenen Werthen für das Bogenelement Mm, z. E. den aus der 3ten Proportion, wo $Mm = \frac{\varepsilon . \text{Tang. A}}{y}$ und ſubſtituire hierein den Werth von Tang. A aus der gegebenen Gleichung $y^3 - x^2 = 0$. Aus (21) iſt Subt. A $= \frac{3y^3}{2x} = \frac{3y^3}{2y^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2} y^{\frac{3}{2}}$, alſo $y^2 + (\text{Subt. A})^2$ oder $(\text{Tang. A})^2 = y^2 + \frac{9}{4} y^3$ alſo Tang. A $= \frac{1}{2} y \sqrt{4+9y}$ und $\frac{\varepsilon . \text{Tang. A}}{y} = \frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{4+9y} = Mm$, dem Längenelemente der Neiliſchen Parabel, für den Parameter 1, alſo $\frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{4 + \frac{9y}{p}}$ für den Parameter p.

Um nun den Bogen A aus ſeinen Elementen zu ſummiren, ſetze man $\sqrt{4+9y} = z$, alſo $Mm = \frac{1}{2} \varepsilon z$; wo man ε, als das Element von y, in z ausdrücken muß. Man betrachte alſo $\sqrt{4+9y} = z$ d. i. $4+9y = z^2$ als eine Linie, in welcher y die Ordinate, z die Abſciſſe, und e das Element von z, ſo wie ε das Element von y iſt, und ſuche die Verhältniß beyder Elemente für dieſe Linie, ſo iſt (155, 1; 3) $\frac{\text{e. Tang. A}}{\text{Subt. A}} = \frac{\varepsilon . \text{Tang. A}}{y}$, alſo $\frac{e}{\text{Subt. A}} = \frac{\varepsilon}{y}$ und Subt. A: $e = y : \varepsilon$, alſo $\varepsilon = \frac{ey}{\text{Subt. A}}$ oder $\varepsilon = \frac{2ez}{9}$, wenn man aus der Gleichung $4 + 9y - z^2 = 0$;

$= 0$; Subſt. $A = \frac{9y}{2z}$ (21) ſubſtituirt; woraus man endlich $\frac{1}{2} \varepsilon z$ oder $Mm = \frac{1}{9} \cdot ez^2$, das Längenelement der Neiliſchen Parabel ganz in z ausgedrückt, findet. Hieraus folgt $A = \frac{1}{9} \cdot \int (ez^2) = \frac{1}{3 \cdot 9} \cdot z^3$, und für z ſeinen Werth geſetzt:

$$A = \tfrac{1}{27} (4+9y)^{\frac{3}{2}} + \text{Conſt}$$

Soll nun der Bogen A für $y = 0$ verſchwinden, ſo muß $0 = \frac{1}{27} \cdot 4^{\frac{3}{2}} + \text{Conſt}$, alſo $\text{Conſt} = -\frac{1}{27} 4^{\frac{3}{2}} = -\frac{8}{27}$ ſeyn. Dieſes giebt alſo

$$A = \tfrac{1}{27} (4+9y)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{8}{27} = \tfrac{1}{27} ([4+9y] \cdot \sqrt{4+9y} - 8)$$

Den Parameter p wieder zu ergänzen, darf man nur darauf ſehen, was die Gleichheit der einfachen Abmeſſung für den Bogen A erfordert, ſo findet man

$$A = \tfrac{1}{27} \left([4p+9y] \cdot \sqrt{\left(\frac{4p+9y}{p}\right)} - 8p\right)$$

Eben das würde man bekommen haben, wenn man in $\frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{4+\frac{9y}{p}}$, dem Längenelemente für den Parameter p; gleich Anfangs $\sqrt{4+\frac{9y}{p}} = z$ geſetzt, und aus dem daraus folgenden Elemente $\frac{epz^2}{9}$, den Bogen A ſummirt hätte.

159. Anm.

159. Anm. Wenn man in dem Ausdrucke des Bogenelements der Neiliſchen Parabel, die Wurzelgröße $\sqrt{4+9y}$ in eine Reihe (88) aufgelößt, und alsdenn die einzelnen Glieder derſelben gehörig ſummirt hätte, ſo hätte man zwar, ohne einige Subſtitution, den Werth von AM, aber nicht in einer endlichen Anzahl von Gliedern, und alſo nur approximatoriſch gefunden; auch da, wo $(4+9y)^{\frac{3}{2}}$ für gewiſſe Werthe von y rationell wird, und alſo der Bogen A ſich vollkommen genau finden läßt, welches geſchieht wenn $4+9y$ eine Quadratzahl wird. Hieraus alſo, und daß die Reihe für viele Werthe von y divergirt, (110) und folglich anders eingerichtet werden muß, erhellet der Vorzug des Ausdrucks (158) vor der Reihe, und mit ihr die Wichtigkeit der Erinnerung (89) Die Neiliſche Parabel iſt übrigens die erſte krumme Linie, deren vollſtändige Rectification man gefunden hat. Man ſehe hiervon Herrn Hofrath Käſtn. Anal. 269.

160. Zuſ. Man ſetze das Längenelement (158) $\frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{\frac{4p+9y}{p}} = \frac{\varepsilon w}{a}$, dem Flächenelemente einer krummen Linie, durch eine beſtändige Größe a dividirt; wo w der krummen Linie Ordinate, y die Abſciſſe und ε das Element von y bedeutet. Nach Wegſchaffung der Irrationalität erhält man alsdenn, $w^2 = \frac{9a^2y}{4p} + a^2 = \frac{9a^2}{4p}(y+\frac{4}{9}p)$ oder, $y+\frac{4}{9}p = u$ geſetzt, $w^2 = \frac{9a^2}{4p}u$, die Gleichung der gemeinen oder Apolloniſchen Parabel von dem Parameter $\frac{9a^2}{4p}$. Das Längenelement der

Neiliſchen Parabel iſt alſo dem Flächenelemente der Apolloniſchen, durch eine beſtändige Größe (a) dividirt, gleich; ſo daß die Rectification der einen und die Quadratur der andern wechſelſeitig von einander abhangen. Da man nun die Apolloniſche Parabel quadriren kann, ſo kann man auch die Neiliſche rectificiren, wodurch alſo die Rectification der leztern begreiflich wird (Anal. 270). Die Verzeichnung der Neiliſchen Parabel aus der Apolloniſchen, kann man bey Wolfen, Anfangsgr. der Alg. 225. nachſehen. Man vergleiche hiermit was (136) von der Hyperbel und der logarithmiſchen Linie geſagt worden iſt.

161. Aufg. 32. Unendliche Parabeln, deren Gleichung $y^m - p^n x^k = 0$; zu rectificiren.

Aufl. Für $y^m = p^n x^k$, iſt $x = \frac{y^{\frac{m}{k}}}{p^{\frac{n}{k}}}$; und

Subt. A $= \frac{mx}{k}$ (21) $= \frac{m y^{\frac{m}{k}}}{k p^{\frac{n}{k}}}$; alſo $y^2 +$ (Subt. A)^2

oder (Tang. A)$^2 = y^2 + \frac{m^2 y^{\frac{2m}{k}}}{k^2 p^{\frac{2n}{k}}}$, und Tang. A

$= y\sqrt{\left(1 + \frac{m^2 y^{\frac{2m-2k}{k}}}{k^2 p^{\frac{2n}{k}}}\right)} = \frac{y}{k p^{\frac{n}{k}}} \times$

$\sqrt{\left(k^2 p^{\frac{2n}{k}} + m^2 y^{\frac{2m-2k}{k}}\right)}$ alſo (155, 3)

s. Tang.

$$\frac{s.\,\text{Tang.}\,A}{y} \text{ oder } Mm = \frac{s}{kp^{\frac{n}{k}}} \sqrt{k^2 p^{\frac{2n}{k}} + m^2 y^{\frac{2m-2k}{k}}} =$$

$$s\sqrt{\left(1 + \frac{m^2 y^{\frac{2m-2k}{k}}}{k^2 p^{\frac{2n}{k}}}\right)} = s(1+V)^{\frac{1}{2}}, \text{ wenn man}$$

$$\frac{m^2 y^{\frac{2m-2k}{k}}}{k^2 p^{\frac{2n}{k}}} = V \text{ ſetzt.}$$

Die Elemente für den Bogen A zu ſummiren, verwandle man die Wurzelgröße $(1+V)^{\frac{1}{2}}$ nach der Formel (88) in eine Reihe, für welche die dortigen P; Q; m; hier 1; V; $\frac{1}{2}$; ſind; und die Buchſtaben A, B, C ... dieſelbe Bedeutung behalten; ſo kommt:

$$s(1+V)^{\frac{1}{2}} = s\left(1 + \tfrac{1}{2}V - \frac{1}{2.4}V^2 + \frac{1.3}{2.4.6}V^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}V^4 \ldots\right)$$

und, den Werth für V gehörig ſubſtituirt,

$$s\left(1 + \frac{m^2 y^{\frac{2m-2k}{k}}}{k^2 p^{\frac{2n}{k}}}\right)^{\frac{1}{2}} = s\left(y^0 + \frac{m^2}{2k^2 p^{\frac{2n}{k}}} y^{\frac{2m-2k}{k}}\right.$$

$$- \frac{1.m^4}{2.4.k^4 p^{\frac{4n}{k}}} y^{\frac{4m-4k}{k}}$$

$$+ \frac{1.3.m^6}{2.4.6.k^6 p^{\frac{6n}{k}}} y^{\frac{6m-6k}{k}}$$

$$- \frac{1.3.5.m^8}{2.4.6.8.k^8 p^{\frac{8n}{k}}} y^{\frac{8m-8k}{k}} \dots$$

alſo $\int(\varepsilon(1 + \frac{m^2 y^{\frac{2m-2k}{k}}}{k^2 p^{\frac{2n}{k}}})^{\frac{1}{2}}$ oder

$$A = y + \frac{m^2}{2(2m-k)kp^{\frac{2n}{k}}} y^{\frac{2m-k}{k}}$$

$$- \frac{1.m^4}{2.4.(4m-3k)k^3 p^{\frac{4n}{k}}} y^{\frac{4m-3k}{k}}$$

$$+ \frac{1.3.m^6}{2.4.6.(6m-5k)k^5 p^{\frac{6n}{k}}} y^{\frac{6m-5k}{k}}$$

$$- \frac{1.3.5.m^8}{2.4.6.8.(8m-7k)k^7 p^{\frac{8n}{k}}} y^{\frac{8m-7k}{k}} \dots$$

162. Zuſ. 1. Für die Neiliſche Parabel wäre hier $m = 3$; $n = 1$; $k = 2$; alſo der Bogen

$$A = y + \frac{3^2}{2.4.2^1 p} y^2 - \frac{1.3^4}{2.4.6.2^3 p^2} y^3 + \frac{1.3.3^6}{2.4.6.8.2^5 p^3} y^4 - \frac{1.3.5.3^8}{2.4.6.8.10.2^7 p^4} y^5 \ldots$$

dem Ausdrucke (158) $\frac{1}{27} p \left(\left[4 + \frac{9y}{p}\right]^{\frac{3}{2}} - 8\right)$ vollkommen gleich, weil ſelbiger, die Wurzelgröße $\left(4 + \frac{9y}{p}\right)^{\frac{3}{2}}$, in eine unendliche Reihe aufgelößt, mit $\frac{1}{27} p$ multiplicirt, und $\frac{8}{27} p$ davon abgezogen, eben dieſelben Glieder geben würde. Hieraus findet man, (die Zahlencoefficienten der Kürze wegen, nach der Ordnung α; β; γ ... geſetzt, und den Werth der Potenzen von y aus der Gleichung ſubſtituirt) den Bogen

$$A = p^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} + \frac{\alpha x^{\frac{4}{3}}}{p^{\frac{1}{3}}} - \frac{\beta x^{\frac{6}{3}}}{p^{\frac{3}{3}}} + \frac{\gamma x^{\frac{8}{3}}}{p^{\frac{5}{3}}} - \frac{\delta x^{\frac{10}{3}}}{p^{\frac{7}{3}}} \ldots$$

in x ausgedrückt; wo für $p = 1$, die Potenzen von p nur weggeſtrichen werden dürfen.

163. Zuſ. 2. Hätte man das Bogenelement aus der Formel (155, 1) ſuchen, und alles in x ausdrücken wollen, ſo wäre

$$Mm = e.\frac{\text{Tang. } A}{\text{Subt. } A} = \frac{e}{3x}\left(9x^2 + 4p^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$ gefunden worden. Wenn man hier die Wurzelgröße in eine Reihe aufloͤſet, ſo findet man (88)

$$Mm = e\left(1 + \frac{2p^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}}{9} - \frac{2p^{\frac{4}{3}}x^{-\frac{4}{3}}}{9^2} + \frac{4p^{\frac{6}{3}}x^{-\frac{6}{3}}}{9^3}\right.$$

$$\left. - \frac{10p^{\frac{8}{3}}x^{-\frac{8}{3}}}{9^4} + \frac{28p^{\frac{10}{3}}x^{-\frac{10}{3}}}{9^5} \ldots\right)$$ und hieraus

$$A = x + \frac{2p^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{2p^{\frac{4}{3}}x^{-\frac{1}{3}}}{3\cdot 9} - \frac{4p^2x^{-1}}{9^3}$$

$$+ \frac{2p^{\frac{8}{3}}x^{-\frac{5}{3}}}{3\cdot 9^3} - \frac{4p^{\frac{10}{3}}x^{-\frac{7}{3}}}{3\cdot 9^4} \ldots$$ oder, den Parameter

$p = 1$ geſetzt,

$$A = x + \frac{2x^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{2}{3\cdot 9\cdot x^{\frac{1}{3}}} - \frac{4}{9^3 x} + \frac{2}{3\cdot 9^3 x^{\frac{5}{3}}}$$

$$- \frac{4}{3\cdot 9^4 x^{\frac{7}{3}}} \ldots = \tfrac{8}{27}\left(\left[\tfrac{9}{4}x^{\frac{2}{3}} + 1\right]^{\frac{3}{2}} - 1\right) =$$

$\frac{8}{27}\left(\left[\frac{9y}{4} + 1\right]^{\frac{3}{2}} - 1\right)$ aus (158) wo die letztere Reihe von A für ein großes, die erſtere (162) für ein kleines x geſchwind convergirt.

164. Anm. Es wäre nicht nöthig geweſen, für den Bogen der **Neiliſchen Parabel** dieſe Reihen zu ſuchen, da man ſeine **vollſtändige Rectification** aus (158) haben kann. Aber es iſt nützlich, wenigſtens durch ein Beyſpiel ſich zu überzeugen, daß der Irrationalausdruck, den man aus der dortigen Subſtitution für den Bogen findet, in eine Reihe verwandelt, eben dieſelben Glieder giebt, welche die, ohne Subſtitution

tion gefundene, nach ihren Theilen ſummirte, Reihe hat, für welche keine Conſtans weder zu addiren noch zu ſubtrahiren iſt, wie auch daraus erhellet, daß für x oder y Null geſetzt, der Bogen A verſchwindet (85.)

165. Zuſ. 3. Für die Apolloniſche Parabel, für welche $m = 2$; $n = 1 = k$ iſt, bekommt man aus (161.) das Element

$$Mm = \frac{\varepsilon}{p} \sqrt{p^2 + 4y^2} = \varepsilon \sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{p^2}\right)},$$ ſo wie

den Bogen

$$A = y + \frac{2y^3}{3p^2} - \frac{2y^5}{5p^4} + \frac{4y^7}{7p^6} - \frac{10y^9}{9p^8}$$
$$+ \frac{28y^{11}}{11p^{10}} - \frac{84y^{13}}{13p^{12}} \ldots$$

wenn man die dortigen Zahlencoefficienten, hier in den kleinſten Zahlen ausdrückt. Weil nun $y + \frac{2y^3}{3p^2} - \ldots$ $= y\left(1 + \frac{2y^2}{3p^2} - \ldots\right)$ ſo findet man hierdurch den Bogen

$$A = \sqrt{px}\left(1 + \frac{2x}{3p} - \frac{2x^2}{5p^2} + \frac{4x^3}{7p^3} - \frac{10x^4}{9p^4}\right.$$
$$\left. + \frac{28x^5}{11p^5} - \frac{84x^6}{13p^6} \ldots\right)$$ in x ausgedrückt; wo ſowohl

y als x kleiner als p ſeyn müſſen, wenn dieſe Reihen convergiren ſollen. Für ein großes y hingegen, muß man in dem Binomio der Irrationalgröße, $4y^2$ zum erſten Theile

Theile machen, (110) und ſo kommt, die Wurzelgröße in $\frac{\varepsilon}{p}(4y^2+p^2)^{\frac{1}{2}}$ gehörig entwickelt, (88) und mit $\frac{\varepsilon}{p}$ multiplicirt, das Bogenelement

$$Mm = \frac{2}{p}\varepsilon y + \frac{p}{4}\cdot\frac{\varepsilon}{y} - \frac{p^3}{64}\varepsilon y^{-3} + \frac{p^5}{512}\varepsilon y^{-5} \ldots$$

und hieraus der paraboliſche Bogen

$$A = \frac{y^2}{p} + \tfrac{1}{4}p.\log. y + \frac{p^3}{2.64y^2} - \frac{p^5}{4.512y^4} \ldots$$

für welchem das erſte, dritte und die folgenden Glieder des Werthes von Mm nach 66. 67. das zweyte aber, oder $\frac{1}{4}p.\frac{\varepsilon}{y}$ nach 118. ſummirt worden ſind; denn $\frac{\varepsilon}{y}$ iſt das Element des Logarithmen von y; alſo die Summe aller dieſer Elemente, oder $\int\left(\frac{\varepsilon}{y}\right) = \log. y$; wo log. y den natürlichen oder hyperboliſchen (121.) Logarithmen von y bedeutet. Hier nun braucht man den Logarithmen nicht zu Abkürzung der Rechnung, ſondern die logarithmiſche Größe (122.) ſelbſt, die hier einen Theil des Werthes von A ausmacht, und die man, wenn y in Zahlen beſtimmt wird, aus Herrn Lamberts Tafeln für die hyperboliſchen Logarithmen (Taf. 13. 15.) finden, oder doch leicht berechnen kann.

166. Zuſ. 4. Aus 109. kommt $u = \frac{a}{2c}\sqrt{c^2+4y^2}$ für die ſchiefwinklichte Hyperbel, alſo, beyde Axen und den Parameter, oder $a=c=p$ geſetzt, $u=\frac{1}{2}\sqrt{p^2+4y^2}$, für

für die rechtwinklichte oder gleichſeitige Hyperbel, wo y die Abſciſſen auf einer, der Hauptaxe ſenkrechten Linie, durch der Hyperbel Mittelpunct; u die zugehörigen ſenkrechten Ordinaten bedeuten. Alſo iſt $\varepsilon u = \frac{1}{2}\varepsilon \sqrt{p^2 + 4y^2}$ das Flächenelement der gleichſeitigen Hyperbel; welches mit $Mm = \frac{\varepsilon}{p}\sqrt{p^2 + 4y^2}$ (165) dem Bogenelemente der gemeinen Parabel verglichen, $\frac{1}{2} Mm = \frac{\varepsilon u}{p}$, das halbe Längenelement der Apolloniſchen Parabel, dem Flächen-Elemente der gleichſeitigen Apolloniſchen Hyperbel durch p dividirt, gleich macht; ſo, daß die Rectification der gemeinen Parabel in einem endlichen algebraiſchen Ausdrucke gegeben ſeyn würde, wenn man die Hyperbel auf die Art quadriren könnte. Die Unmöglichkeit aber einer ſolchen Quadratur, die auf Logarithmen führt, welche tranſcendentiſche Functionen (Alg. 571.) ihrer Zahlen ſind, hat Herr Hofrath Käſtner (Anal. 272.) zum Theil gezeigt. Wenn man alſo die Reihe (109, 1.) für die veränderliche hyperboliſche Fläche CpMA, mit $\frac{2}{p}$ multiplicirt, ſo findet man hieraus den unbeſtimmten paraboliſchen Bogen für eine kleine Ordinate y auf der Axe, oder

$$A = y + \frac{2y^3}{3p^2} - \frac{1.2^2.y^5}{1.2.5.p^4} + \frac{1.3.2^3.y^7}{1.2.3.7.p^6}$$

$$- \frac{1.3.5.2^4.y^9}{1.2.3.4.9.p^8} \ldots \mp \frac{1.3.5\ldots(2n-5)\,2^{n-1}\,y^{2n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)(2n-1)\,p^{2n-2}}$$

vollkommen einerley mit dem erſten Werthe von A in (165) Das nte Glied der Reihe iſt hier poſitiv oder negativ, nachdem n gerade oder ungerade iſt (88).

167. Aufg. 33. Einen elliptiſchen, oder hyperboliſchen Bogen AM = A (Fig. 10. 11.) zu rectificiren.

Aufl. In (155, 1) iſt $Mm^2 = e^2 \frac{(\text{Tang. A})^2}{(\text{Subt. A})^2}$

$$= e^2 \left(\frac{PT^2 + PM^2}{PT^2}\right) = e^2 \left(1 + \frac{PM^2}{PT^2}\right) = e^2 \left(1 + \frac{PN}{PT}\right)$$

woraus $Mm = e\sqrt{1 + \frac{PN}{PT}}$, und eben ſo $Mm = \varepsilon\sqrt{1 + \frac{pn}{pt}}$ folgt. Demnach iſt (56) $\varepsilon\sqrt{1 + \frac{pn}{pt}} = \varepsilon\sqrt{1 + \frac{a^2y^2}{\frac{1}{4}c^4 \mp c^2y^2}}$

$$= \varepsilon\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}c^4 \mp c^2y^2 + a^2y^2}{\frac{1}{4}c^4 \mp c^2y^2}\right)} = \varepsilon\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}c^4 + f^2y^2}{\frac{1}{4}c^4 \mp c^2y^2}\right)}$$

wenn man $a^2 - c^2$ für die Ellipſe, und $a^2 + c^2$ für die Hyperbel, in beyden Fällen $= f$ ſetzt. Alſo iſt

$$Mm = \varepsilon\left(\tfrac{1}{4}c^4 + f^2y^2\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\tfrac{1}{4}c^4 \mp c^2y^2\right)^{-\frac{1}{2}};$$

wo y die Abſciſſe (56) aus dem Mittelpuncte auf der zweyten oder Neben-Axe; ε das Element dieſer Abſciſſe bedeutet. Nun iſt, wenn man P; Q; m; in 88. gehörig beſtimmt:

$$\left(\tfrac{1}{4}c^4 + f^2y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{c^2}{2} + \frac{f^2y^2}{c^2} - \frac{1.\,2^1 f^4 y^4}{1.\,2.\,c^6}$$

$$+ \frac{1.3.2^2 f^6 y^6}{1.2.3.c^{10}} - \frac{1.3.5.2^3 f^8 y^8}{1.2.3.4.c^{14}} + \frac{1.3.5.7.2^4 f^{10} y^{10}}{1.2.3.4.5.c^{18}}$$

$\ldots = K$; und

$(\frac{1}{4}c^4$

$$\left(\tfrac{1}{4}c^4 \mp c^2y^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{c^2} \pm \frac{4y^2}{c^4} + \frac{1.3.2^3y^4}{1.2.c^6}$$

$$\pm \frac{1.3.5.2^4y^6}{1.2.3.c^8} + \frac{1.3.5.7.2^5y^8}{1.2.3.4.c^{10}} \pm \frac{1.3.5.7.9.2^6y^{10}}{1.2.3.4.5.c^{12}}$$

$\ldots = L$; und $Mm = \varepsilon KL$.

Man multiplicire alſo die Reihe L; nach und nach mit den einzelnen Gliedern der Reihe K; ſo kommt, wenn man der Kürze wegen die Zahlencoefficienten des dritten, vierten u. ſ. w. Gliedes in K; hier α, β, γ &c. und die Coefficienten eben dieſer Glieder der Reihe L; α', β', γ' &c. ſetzt, und jedes Glied von KL ſogleich ſummirt (66)

$$y \pm \frac{2y^3}{3c^2} + \frac{\alpha' y^5}{5.2c^4} \pm \frac{\beta' y^7}{7.2c^6} + \frac{\gamma' y^9}{9.2c^8} \pm \frac{\delta' y^{11}}{11.2c^{10}} \ldots = M$$

$$+ \frac{2f^2y^3}{3.c^4} \pm \frac{4f^2y^5}{5.c^6} + \frac{\alpha' f^2y^7}{7c^8} \pm \frac{\beta' f^2y^9}{9c^{10}} + \frac{\gamma' f^2y^{11}}{11c^{12}} \ldots = N$$

$$- \frac{2\alpha f^4y^5}{5c^8} \mp \frac{4\alpha f^4y^7}{7c^{10}} - \frac{\alpha\alpha' f^4y^9}{9c^{12}} \mp \frac{\alpha\beta' f^4y^{11}}{11c^{14}} \ldots = O$$

$$+ \frac{2\beta f^6y^7}{7c^{12}} \pm \frac{4\beta f^6y^9}{9c^{14}} + \frac{\alpha'\beta f^6y^{11}}{11c^{16}} \ldots = P$$

$$- \frac{2\gamma f^8y^9}{9c^{16}} \mp \frac{4\gamma f^8y^{11}}{11c^{18}} \ldots = Q$$

$$+ \frac{2\delta f^{10}y^{11}}{11c^{20}} \ldots = R$$

---

und $y + \frac{2(f^2 \pm c^2)}{3c^4}y^3 + \frac{\frac{1}{2}\alpha' c^4 \pm 4f^2c^2 - 2\alpha f^4}{5c^8}y^5$

+

$$+\frac{\pm\frac{1}{2}\beta' c^6+\alpha' f^2 c^4 \mp 4\alpha f^4 c^2+2\beta f^6}{7c^{12}}y^7$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\gamma' c^8\pm\beta' f^2 c^6-\alpha\alpha' f^4 c^4\pm 4\beta f^6 c^2-2\gamma f^8}{9c^{16}}y^9$$

$$+\left(\frac{\pm\frac{1}{2}\delta' c^{10}+\gamma' f^2 c^8\mp\alpha\beta' f^4 c^6+\alpha'\beta f^6 c^4}{11\,c^{20}}\right.$$

$$\left.\frac{\mp 4\gamma f^8 c^2+2\delta f^{10}}{11c^{20}}\right)y^{11}\ldots=M+N+O+$$

$$P+Q+R\ldots=f(\varepsilon KL)==A$$

Oder, wenn $a^2\mp c^2$ ſtatt f^2, und ſtatt der griechiſchen Buchſtaben die Zahlen gehörig wieder ſubſtituirt werden:

$$A=y+\frac{2a^2}{3c^4}y^3\pm\frac{2a^2(4c^2\mp a^2)}{5c^8}y^5$$

$$+\frac{4a^2(8c^4\mp 4a^2c^2+a^4)}{7c^{12}}y^7$$

$$\pm\frac{2a^2(64c^6\mp 48a^2c^4+24a^4c^2\mp 5a^6)}{9c^{16}}y^9\ldots$$

für den Bogen AM der Ellipſe und Hyperbel, jenen aus den obern, dieſen aus den untern Zeichen.

168. Zuſ. 1. Wenn man in der letzten Reihe für den Bogen A = AM der Ellipſe, die Buchſtaben c, a, y mit a, c, u verwechſelte, ſo käme

$$A'=u+\frac{2c^2}{3a^4}u^3+\frac{2c^2(4a^2-c^2)}{5a^8}u^5$$

$$+\frac{4c^2(c^4+8a^4-4a^2c^2)}{7a^{12}}u^7$$

$$+ \frac{2c^2(64a^6 - 48a^4c^2 + 24a^2c^4 - 5c^6)}{9a^{16}} u^9 \ldots$$

wo $u = CP$, nun auf der großen Axe AB liegt; alſo A' hier nicht den Bogen AM, ſondern den Bogen aM (Fig. 10.) bedeutet. Für die Hyperbel iſt die (167) gefundene Reihe bequemer als die verwandelte ſeyn würde.

169. Zuſ. 2. Man ſetze $a = nc$ (Alg. 371.) ſo kommt (168.)

$$A' = u + \frac{2}{3n^4c^2}u^3 + \frac{2(4n^2 - 1)}{5n^8c^4}u^5$$

$$+ \frac{4(8n^4 - 4n^2 + 1)}{7n^{12}c^6}u^7$$

$$+ \frac{2(64n^6 - 48n^4 + 24n^2 - 5)}{9n^{16}c^8}u^9 \ldots = aM$$

und (167)

$$A = y + \frac{2n^2}{3c^2}y^3 \pm \frac{2n^2(4 \mp n^2)}{5c^4}y^5$$

$$+ \frac{4n^2(8 \mp 4n^2 + n^4)}{7c^6}y^7$$

$$\pm \frac{2n^2(64 \mp 48n^2 + 24n^4 \mp 5n^6)}{9c^8}y^9 \ldots = AM$$

Für $n = 1$ wäre $a = c$; alſo für den Bogen eines Kreiſes von dem Diameter c, aus den obern Zeichen:

$$A = y + \frac{2[1]}{3c^2}y^3 + \frac{2[3]}{5c^4}y^5 + \frac{2[10]}{7c^6}y^7 + \frac{2[35]}{9c^8}y^9$$

$+ \frac{2[126]}{11c^{10}} y^{11} + \frac{2[462]}{13c^{12}} y^{13} \ldots$ in welcher Reihe die eingeſchleſſenen Zahlen, mit den figurirten (Alg. 726.) Zahlen, nach der 109, 4. bemerkten Ordnung übereinkommen.

Dieſe Reihe iſt nun offenbar der Reihe M (168.) gleich, (wenn man in ihr ſtatt der griechiſchen Buchſtaben die Zahlen ſetzt, und alles gehörig verkürzt) wie auch ſchon daraus erhellet, weil für den Kreiß, $a^2 - c^2$ d. i. $f^2 = 0$ wird, und alſo die übrigen Reihen N, O, P &c. hier wegfallen. Die Subſtitution der Zahlen giebt hier die Reihe M, d. i. den Kreißbogen

$$A = y + \frac{2.}{3c^2} y^3 + \frac{1.3.2^2}{1.2.5c^4} y^5 + \frac{1.3.5.2^3}{1.2.3.7c^6} y^7$$

$$+ \frac{1.3.5.7.2^4}{1.2.3.4.9c^8} y^9 + \frac{1.3.5.7.9.2^5}{1.2.3.4.5.11c^{10}} y^{11}$$

$$+ \frac{1.3.5.7.9.11.2^6}{1.2.3.4.5.6.13.c^{12}} y^{13} \ldots = y + \frac{2[1]}{3c^2} y^3 + \frac{2[3]}{5c^4} y^5 \ldots$$

wie vorhin. Für die rechtwinklichte Hyperbel käme, für $n = 1$, aus den untern Zeichen:

$$A = y + \frac{2}{3c^2} y^3 - \frac{10}{5c^4} y^5 + \frac{52}{7c^6} y^7$$

$$- \frac{282}{9c^8} y^9 \ldots\ldots$$

170. Aufg. 34. Den Bogen AM = A, eines Kreiſes (Fig. 18.) zu rectificiren.

Aufl. Ein Ausdruck für dieſen Bogen findet ſich im vorhergehendem Abſchnitte. Auch kann man, aus denen im vorigen Capitel berechneten Werthen der Kreisausſchnitte (96. ſeqq.) für den Durchmeſſer a, den zugehörigen Bogen ſogleich finden, wenn man den berechneten Ausſchnitt mit $\frac{a}{4}$ dividirt, oder mit $\frac{4}{a}$ multiplicirt (97). Hier will ich nur noch zeigen, wie man den Kreißbogen vermittelſt der Tangente, oder des Sinus berechnen könne.

Für die Tangente $AT = z$; ſey $Tt =$ el. $z = e$. Weil nun (101) das Bogenelement eines Kreiſes dem Elemente der zugehörigen Tangente durch das Quadrat der Secante dividirt, gleich, oder

$Mm = \frac{e}{1+zz}$ iſt; ſo iſt $\int\left(\frac{e}{1+zz}\right)$ oder

$$A = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots = z\left(1 - \tfrac{1}{3}z^2 + \tfrac{1}{5}z^4 - \tfrac{1}{7}z^6 + \tfrac{1}{9}z^8 - \tfrac{1}{11}z^{10} \ldots \pm \frac{1}{2n-1}z^{2n-2}\right)$$

das nte Glied poſitiv oder negativ, nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl iſt. Für den Bogen $AM = 45°$, wäre $z = 1$ alſo, der achte Theil der Peripherie

$$= 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} \ldots = Q = 2\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 11} + \frac{1}{13\cdot 15} \ldots\right)$$ für den Halbmeſſer 1; und $4Q = 4$

$(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots) = 8(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} \ldots)$

die ganze Peripherie eines Kreiſes, für den Durchmeſſer 1.

Dieſe Reihe nun iſt zu Berechnung des Kreißumfanges unbequem, weil ſie viel zu langſam convergirt (102.) Man muß daher den Kreißbogen A ſo beſtimmen, daß z ein kleiner Bruch des Halbmeſſers wird, für den alsdenn die Reihe ſich geſchwinder nähert. Man ſetze alſo A = 30°, ſo iſt, für den Halbmeſſer 1, alsdenn

Sin. $A = \frac{1}{2}$; Coſ. $A = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, und Coſ. A $(\frac{1}{2}\sqrt{3})$: Sin A $[\frac{1}{2}]$ = 1 : Tang. A [z] alſo hier

$z = \frac{1}{\sqrt{3}}$, und der Bogen von 30 Graden, als der 12te Theil der Peripherie, aus obiger Reihe für A, durch die Zahlenreihe

$\sqrt{\frac{1}{3}}(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4}$

$- \frac{1}{11 \cdot 3^5} \ldots)$ gegeben. Das ſechsfache dieſer Reihe

giebt alsdenn, weil $6\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{36}{3}} = \sqrt{12}$, wenn man

mit $\sqrt{12}$ wirklich multiplicirt:

Die halbe Peripherie $= \frac{\sqrt{12}}{1} - \frac{\sqrt{12}}{3 \cdot 3} + \frac{\sqrt{12}}{5 \cdot 3 \cdot 3}$

$- \frac{\sqrt{12}}{7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{\sqrt{12}}{9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} - \frac{\sqrt{12}}{11 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$

+

$+ \frac{\sqrt{12}}{13 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$ . . . für den Halbmeſſer 1, alſo die ganze Peripherie, oder P, für den Durchmeſſer 1

Die Summe dieſer Reihe findet man, wenn man, auf eine ähnliche Art, wie in 125, die Irrationalgröße $\sqrt{12} = 3, 46 \ldots$ mit 3, den Quotienten wieder mit 3, den neugefundenen Quotienten abermal mit 3, und ſo ferner dividirt, die Irrationalzahl alsdenn, nebſt denen dergeſtalt aus ihr nach und nach gefundenen Zahlen, in ihrer Ordnung durch die von 1 an auf einander folgenden ungeraden Zahlen theilt, und das was auf die Art heraus kommt, in eine algebraiſche Summe bringt. Der Columme A, (welche die Irrationalzahl $\sqrt{12}$, mit allen, durch fortgeſetzte Diviſion der Zahl 3 aus ihr gefundenen Quotienten enthält) ſetze man die ungeraden Zahlen in ihrer Ordnung zur Seite: ſo giebt, das erſte, dritte, fünfte ꝛc. Glied (die ungeraden Glieder) von A, durch die jedesmal daneben ſtehenden ungeraden Zahlen dividirt, das erſte, zweyte, dritte ꝛc. Glied in der Columme B; das zweyte, vierte, ſechſte ꝛc. Glied (die geraden Glieder) von A hingegen, durch die zugehörigen daneben ſtehenden ungeraden Zahlen dividirt, das erſte, zweyte, dritte ꝛc. Glied in der Columne C; ſo daß B den poſitiven, C den negativen Theil der Reihe enthält, und ſo giebt B — C die Peripherie P um ſo genauer, jemehr man Decimalſtellen für $\sqrt{12}$ geſucht hat. Die Rechnung dafür iſt folgende:

	A	B	C
1)	3,464101615138(	3,464101615138	$=\sqrt{12}$
3)	1,154700538379		(0,384900179460
5)	384900179460(	76980035892	
7)	128300059820		(18328579974
9)	42766686607(	4751854072	
11)	14255562202		(1295960200
13)	4751854067(	365527236	
15)	1583951356		(105596757
17)	527983785(	31057870	
19)	175994595		(9262873
21)	58664865(	2793565	
23)	19554955		(850215
25)	6518318(	260733	
27)	2172773		(80473
29)	724258(	24974	
31)	241419		(7788
33)	80473(	2438	
35)	26824		(766
37)	8941 (	242	
39)	2980		(76
41)	993(	24	
43)	331		(8
45)	110(	2	
47)	37		(1

$B = + 3,546233172181$ (0,404640518591

$- C = - 0,404640518591$

alſo $B - C = 3,141592653.590 \ldots = P$, bis auf 9 Decimalſtellen genau, weil $\sqrt{12}$ nur auf 12 Stellen iſt berechnet worden.

S. Käſtn. Anal. 306. 307. 308. wo zugleich aus dem Herrn Euler eine bequeme Methode angegeben wird, den Bogen von 45° aus ſeinen beyden unbe-

ſtimm-

ſtimmten Theilen a + b vermittelſt der Tangente der Summe dieſer Bogen zu berechnen, wobey man die beſchwerliche Ausziehung einer Wurzelgröße nicht nöthig hat.

171. Aufg 35. Die Peripherie des Kreiſes vermittelſt des Sinus eines Bogens AM = A (Fig. 30.) zu finden.

Aufl. Für den Halbmeſſer AC = 1 = CD, ſey PM oder Sin. A = y; PC oder Coſ. A = $\sqrt{1 - yy}$; Man ziehe mp der Linie MP unendlich nahe, und MR mit AC parallel; ſo iſt △MPC ∽ △MRm; alſo, wenn man mR, das Element des Sinus von A, oder el. y = ε ſetzt; PC ($\sqrt{1-yy}$): MC (1) = mR (ε):

Mm = $\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-yy}}$, oder, ſtatt 1 den Halbmeſſer r geſetzt, Mm = $\frac{\varepsilon r}{\sqrt{r^2 - y^2}}$, das Bogenelement des Kreiſes dem Producte aus dem Halbmeſſer in das Element des Sinus, dividirt durch den Coſinus, gleich; welche Formel mit Mm = $\frac{\varepsilon.\text{Norm. A}}{\text{Subn. A}}$ aus (155, 4) einerley iſt, weil die Normale für den Durchmeſſer des Kreiſes, in allen Puncten = r, dem Halbmeſſer des Kreiſes; alſo die Subnormale = $\sqrt{r^2 - y^2}$ ſeyn muß. Wenn alſo, für r = 1; Mm d. i. Elem. A = $\frac{\text{el. Sin. A}}{\text{Coſ. A}}$; ſo findet man hieraus, Elem. Sin. A = el. A × Coſ. A; Beyde Formeln muß man, ihres vielfachen Gebrauchs wegen, wohl merken.

In dem Ausdrucke $\frac{\varepsilon r}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}}}$

$= \varepsilon \left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ verwandele man die Irrationalgröße in eine Reihe, indem man P; Q; m in 88. hier 1; $-\frac{y^2}{r^2}$ $-\frac{1}{2}$; ſetzt; ſo kömmt

$$Mm = \varepsilon \left(1 + \frac{y^2}{2r^2} + \frac{1.3.y^4}{1.2.2^2 r^4} + \frac{1.3.5.y^6}{1.2.3.2^3 r^6}\right.$$

$$+ \frac{1.3.5.7.y^8}{1.2.3.4.2^4 r^8} + \frac{1.3.5.7.9.y^{10}}{1.2.3.4.5.2^5 r^{10}} \ldots$$

$$\ldots + \frac{1.3.5 \ldots (2n-3) y^{2n-2}}{1.2.3 \ldots (n-1) 2^{n-1} r^{2n-2}}$$

und hieraus, von den einzelnen Gliedern der Reihe die Summe (79) genommen,

$$A = y + \frac{y^3}{6r^2} + \frac{1.3.y^5}{1.2.2^2.5r^4} + \frac{1.3.5.y^7}{1.2.3.2^3.7r^6}$$

$$+ \frac{1.3.5.7.y^9}{1.2.3.4.2^4.9r^8} + \frac{1.3.5.7.9.y^{11}}{1.2.3.4.5.2^5\,11r^{10}} \ldots$$

$$\ldots + \frac{1.3.5 \ldots (2n-3) y^{2n-1}}{1.2.3 \ldots (n-1)(2n-1) 2^{n-1} r^{2n-2}}$$

172. Expl. Wenn $A = 30°$, alſo Sin. A oder $y = \frac{1}{2}$, für $r = 1$; geſetzt wird, ſo kommt für den rectificirten Bogen von 30 Graden hier

$A = \frac{1}{2}$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{6.2^3} + \frac{1.3}{1.2.5.2^7} + \frac{1.3.5}{1.2.3.7.2^{10}}$$

$+ \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.9.2^{13}} \ldots$ und das ſechsfache dieſer Reihe, oder die halbe Peripherie für den Halbmeſſer 1, d. i.

$$6A = 3 + \frac{3}{3.2^3} + \frac{3^2}{4.5.2^5} + \frac{5.3^2}{4.6.7.2^7}$$

$$+ \frac{7.5.3^2}{4.6.8.9.2^8} + \frac{9.7.5.3^2}{4.6.8.10.11.2^{11}}$$

$$+ \frac{11.9.7.5.3^2}{4.6.8.10.12.13.2^{13}} \ldots$$

und, wenn A, B, C, D, &c. die jedesmaligen vorhergehenden ganzen Glieder bedeuten,

$$6A = 3 + \frac{A.1^2}{2.3.2^2} + \frac{B.3^2}{4.5.2^2} + \frac{C.5^2}{6.7.2^2}$$

$$+ \frac{D.7^2}{8.9.2^2} + \frac{E.9^2}{10.11.2^2} + \frac{F.11^2}{12.13.2^2} + \frac{G.13^2}{14.15.2^2} \ldots$$

$\ldots + \frac{\Omega(2n-3)^2}{(2n-2)(2n-1)2^2} = P$, der ganzen Peripherie für den Durchmeſſer 1; wo n jede ganze Zahl, von 2 an, bedeuten kann. Für n = 1 käme hier was Ungereimtes. Das erſte Glied hat nämlich kein vorhergehendes, aus welchem es ausgedrückt ſeyn könnte. Man vergleiche hiermit 109, 1. p. 85.

In dieſer Reihe iſt jedes Glied ein Product aus dem nächſt vorhergehenden Gliede in das Quadrat einer unge-

raden Zahl, dividirt durch das Product des Quadrates der 2 in eine Proniczahl; weil das Product jeder zwo nächſt aufeinander folgenden ganzen Zahlen ($m.m+1$ oder $m.m-1$) immer eine Proniczahl ($m^2 \mp m$) giebt.

173. Zuſ. 1. Für den Halbmeſſer $CM = 1$, ſey CP oder Coſ. $A = u$; PM oder Sin. $A = \sqrt{1-u^2}$, ſo iſt $MR = Pp$, das Element des Coſinus von A, hier negativ, oder $Pp = -e$, weil der Coſinus kleiner wird, wenn der Bogen mit ſeinem Sinus wächſt, und umgekehrt. Die ähnlichen Triangel MPC, MRm, geben ſodann

$$PM\,(\sqrt{1-u^2}) : MC\,(1) = MR \text{ oder } Pp\,(-e):$$

Mm; alſo Mm oder Elem. $A = -\dfrac{e}{\sqrt{1-u^2}}$

$= -\dfrac{\text{el. Coſ. } A}{\text{Sin. } A}$; alſo Elem. Coſ. $A = -$ el. $A \times$ Coſ. A, beydes für den Halbmeſſer 1, und

$$Mm = -\frac{er}{\sqrt{r^2-u^2}} = -e\left(1-\frac{u^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$ für den

Halbmeſſer r; das Bogenelement des Kreiſes dem negativen Producte aus dem Halbmeſſer in das Element des Coſinus, dividirt durch den Sinus, gleich.

174. Zuſ. 2. Man ſetze Sin. vers. A oder $AD = x$, ſo iſt Pp oder MR (das vorige Element des Coſinus) hier el. Sin. v. $A = e$, und aus eben der Proportion (173)

$$Mm = \frac{Pp.\,MC}{MP} \text{ d. i. Elem. } A = \frac{\text{el. Sin. v. } A}{\text{Sin. } A}$$

=

$= \frac{e}{\sqrt{(2x-xx)}}$ für den Halbmeſſer 1; alſo El. A $=$ $\frac{er}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$ für den Halbmeſſer r; woraus man, ſo wie aus (171. 173) den zugehörigen Bogen, und aus ihm die ganze Peripherie berechnen kann. Und ſo kann man das Bogenelement des Kreiſes auch aus andern trigonometriſchen Linien, und umgekehrt, dieſe wieder aus dem Bogen ausdrücken: wozu man die Proportionen entweder unmittelbar aus der Figur herleiten, oder durch Subſtitution und Umkehrung der Reihen, finden kann. Dergleichen Formeln aus dem Cirkel ſind ihres weitläuftigen Gebrauchs wegen von großem Nutzen.

175. Zuſ. 3. Aus der berechneten Kreißperipherie P, (170. 171) kann man nun ſehr leicht die Länge der Kreißbogen einzelner Grade, Minuten, Secunden ꝛc. in Theilen des Halbmeſſers oder Durchmeſſers berechnen. Denn für den Halbmeſſer 1 drückt die Zahl P oder 3, 1419 . . (170.) die halbe Peripherie des Kreiſes aus, folglich iſt

$\frac{P}{180} = 0{,}017453\ 292519\ 943295\ 769236\ 908 =$ 1 Grad

$\frac{1\ \text{Gr.}}{60} = 0{,}000290\ 888208\ 665721\ 596153\ 948 =$ 1 Minute

$\frac{1\ \text{Min.}}{60} = 0{,}000004\ 848136\ 811095\ 359935\ 899 =$ 1 Secunde

$\frac{1\ \text{Sec.}}{60} = 0{,}000000\ 080802\ 280184\ 922665\ 598 =$ 1 Tertie

und ſo ferner für die Quarten, Quinten ꝛc.

Beym

Beym Hrn. Lambert findet man auf der 23. Tafel die Länge der Cirkelbögen von 1. bis auf 100 Grade, und von da an, von 30 zu 30 Graden, ſo wie auch für Minuten und Secunden, insgeſammt bis auf 27. Decimalſtellen berechnet.

In der 24ſten Tafel p. 151. findet man unter andern auch den Bogen angegeben, welcher dem Halbmeſſer der Länge nach gleich iſt. Die Rechnung dafür iſt leicht, wenn man einmal, wie hier, die Länge eines Gradbogens ſchon berechnet hat. Denn man ſetze, der geſuchte Bogen habe n Grade, ſo iſt, für den Halbmeſſer 1, alsdenn

$$n \cdot 0{,}0174532925\ldots = 1;\ \text{folglich}\ n = \frac{1}{0{,}01745\ldots}$$

und hieraus der Bogen = 57°, 2957795 1308 ... Der Reſt aus dieſer Diviſion, mit 60 multiplicirt und mit 0, 01745 .... dividirt, giebt Minuten, und die Wiederholung dieſes Verfahrens, Secunden, Tertien ꝛc. und ſo findet man endlich den geſuchten Bogen, beynahe $57° \frac{21}{71}$, oder genauer $57°\ 17'\ 44''\ 48'''\ 22^{IV}\ 29^{V}\ 21^{VI} + \ldots$ S. Eul. Introd. in An. inf. L. II. §. 530.

Hätte man die Länge einer Sexte berechnet gehabt, ſo hätte man den verlangten Bogen ſogleich in Sexten ſuchen, und hieraus denſelben in Graden, Minuten u. ſ. w. noch etwas leichter und geſchwinder als vorhin finden können.

Eine Anwendung der hier vorgetragenen Rectifications-Methode auf tranſcendentiſche Linien geben nachſtehende beyde Aufgaben.

176. Aufg. 36. Die Cykloide AbφF (Fig. 25.) zu rectificiren.

Aufl. Weil (139) Db oder y = Ad + Dd, oder, wenn man den Kreisbogen Ad = A ſetzt, y = A + Sin. A, ſo iſt Elem. y oder ε = el. A + el. Sin. A = el. A + el.

A ×

A × Coſ. A [171] d. i. $\varepsilon = (1 + \text{Coſ. A})$ el. A $=$ $(1 + \text{Coſ. A}) \frac{\text{el. Sin. vers. A}}{\text{Sin. A}}$ [174] alſo, wenn Sin. vers. A oder AD = x geſetzt wird, $\varepsilon = \frac{(2-x)e}{\sqrt{2x-xx}}$ für den Halbmeſſer 1; oder $\varepsilon = \frac{(2r-x)e}{\sqrt{(x[2r-x])}}$ für des beſchreibenden Kreiſes Halbmeſſer AC = r; wodurch alſo das Element der Cykloidenordinate y = bD ganz in der zugehörigen Abſciſſe x = AD ausgedrückt iſt, weil auch e, als das Element dieſer Abſciſſe, ſich auf x bezieht, ſo daß man nun $\sqrt{e^2+\varepsilon^2}$, oder das Bogenelement (155, 5) der Cykloide leicht ausdrücken kann.

Man ſubſtituire nämlich den Werth von $\varepsilon^2 = \frac{(2r-x)^2 e^2}{x(2r-x)} = \frac{(2r-x)e^2}{x}$, in den Irrationalausdruck des Bogenelementes, ſo kommt $\sqrt{e^2+\varepsilon^2}$ $= \sqrt{e^2 + \frac{(2r-x)e^2}{x}} = e\sqrt{\frac{2r}{x}} = 2^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} e x^{-\frac{1}{2}}$ für das Element des Cykloiden-Bogens Ab, und hieraus (67) $\frac{2^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$ oder $2\sqrt{2rx}$ für den rectificirten Bogen Ab, der für x = o verſchwindet. Alſo iſt jeder unbeſtimmte Bogen Ab der Cykloide, der doppelten Sehne des zugehörigen Kreißbogens Ad gleich; weil $\sqrt{2rx}$ der Ausdruck einer ſolchen Sehne iſt. Für x = 2r verwandelt ſich Ab in AbφF und $2\sqrt{2rx}$

in

in 4r, daß alſo $Ab\varphi F = 4r$, die halbe Cykloide dem vierfachen Halbmeſſer oder dem doppelten Durchmeſſer des beſchreibenden Kreiſes gleich iſt. Die Rectification der Cykloide hat der Engländer Wrenn, ſo wie Roberwall ihre Quadratur, zuerſt gefunden.

177. Aufg. 37. Die Archimedeiſche Spirale (Fig. 26.) zu rectificiren.

Aufl. Wenn in der Spirale $rx = py$, die Abſciſſe x um einen unendlich kleinen Theil e der Peripherie zunimmt, ſo wächſt (143) die Ordinate y um einen proportionellen Theil ε ihres Halbmeſſers, ſo daß hier $rx + re = py + p\varepsilon$, und die Differenz aus beyden Gleichungen, die Gleichung $re = p\varepsilon$, zwiſchen den Elementen e; ε, giebt; woraus $e = \frac{p\varepsilon}{r}$ und $\varepsilon = \frac{re}{p}$ folgt. Nun iſt $mR = \varepsilon$, und $CP\ (r) : Pp\ (e) = CM\ (y) : MR = \frac{ey}{r}$; alſo (155, 5) $\sqrt{mR^2 + MR^2} = Mm = \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{e^2y^2}{r^2}}$, dem Bogenelemente der Spirale.

Man ſubſtituire alſo den Werth von $e^2 = \frac{p^2\varepsilon^2}{r^2}$ in dieſen Irrationalausdruck, ſo findet man das Bogenelement $Mm = \sqrt{(\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2p^2y^2}{r^4})}$ oder $Mm = \frac{\varepsilon}{r^2}\sqrt{r^4 + p^2y^2}$; oder hierein die Werthe von $\varepsilon = \frac{re}{p}$; $y^2 = \frac{r^2x^2}{p^2}$ ſubſtituirt, $Mm = \frac{e}{p}\sqrt{r^2 + x^2}$; woraus $\frac{e}{p}$

$\frac{1}{p} \int (e[r^2 + x^2]^{\frac{1}{2}}$ für den Bogen CM der Spirale folgt. Die Vergleichung dieſes Elements der Spirale mit den Elementen (109. 166) zeigt deutlich, daß die Rectification der Spirale mit der Quadratur der rechtwinklichten Hyperbel, folglich mit den Logarithmen, zuſammenhängt. Es iſt auch wirklich

$$\frac{1}{p} \int (e[x^2+r^2]) = \frac{1}{2p} x^2 + \frac{r^2}{2p} \text{ log. hyp. } x$$

$$+ \frac{r^4}{16p} x^{-2} \ldots$$

IV.

Von

Cubirung der Körper,

beſonders der runden,

die durch Umdrehung einer krummen Linie um ihre Axe entſtehen.

178. Erklärung.

Den Innhalt eines Körpers findet man, man cubirt ihn, wenn man die Elemente, aus denen er beſteht, alle in eine Summe bringt.

179. Aufg. 38. Den Innhalt einer Pyramide AGDO (Fig. 31.) aus ihren Elementen zu finden.

Aufl. In der Pyramide AGDO ſtelle man ſich das Perpendikel AC = f, oder die Höhe der Pyramide, in ver-

verſchiedene gleiche Theile AK = KH = HF = FE &c. getheilt vor, und lege durch die Theilungspuncte K, H, F, E ... die Ebenen T, S, R, Q ... insgeſammt mit der Grundebene B parallel: ſo ſind die Schnitte dieſer Ebenen der Grundfläche B durchgängig ähnlich (Geom. 61. S.) alſo (2 Zuſ.) T: B = ILq: GDq = AKq: ACq [f^2] oder $T = \frac{B.\,AKq}{f^2}$; und eben ſo $S = \frac{B.\,AHq}{f^2}$; $R = \frac{B.\,AFq}{f^2}$; $Q = \frac{B.\,AEq}{f^2}$; u. ſ. w. Nun iſt (5 Zuſ.) jedes Pyramidenſtück zwiſchen zwoen parallelen Ebenen, größer als ein Prisma, deſſen Grundfläche die untere größere Ebene, kleiner als ein Prisma, deſſen Grundfläche die obere kleinere Ebene wäre, wenn beyde Prismata den Perpendikel zwiſchen den parallelen Ebenen des Pyramidenſtückes zur Höhe hätten. Aber die Größe dieſes zwiſchen nurgedachte beyde Prismata fallenden Pyramidenſtückes, iſt von der Größe jedes dieſer Prismatum weniger unterſchieden, als dieſe Prismata ſelbſt von einander unterſchieden ſind; und da der Unterſchied beyder Prismatum immer geringer wird, jemehr ihre Höhe abnimmt, je näher die parallelen Ebenen des Pyramidenſtückes an einander rücken, und dieſe Näherung über alle Gränzen fortgeſetzt ſich gedenken läßt: ſo muß endlich, wenn die gleichen Höhen dieſer Körper kleiner, als jede angebliche Größe beträgt, d. i. wenn die beyden parallelen Ebenen einander unendlich nahe angenommen werden, der Unterſchied beyder Prismatum in Vergleichung mit dem auf der obern oder untern Ebene, und um ſo mehr in Vergleichung mit dem dazwiſchen fallenden Pyramidenſtücke, unter alle Gränzen ſich vermindern; alſo ein ſolches unendlich kleines Prisma von dem zugehörigen Pyramidenſtücke nicht mehr zu unterſcheiden, folglich ihm gleich ſeyn.

Wenn

Wenn man alſo die Höhe $AC = f$, in unendlich viele unendlich kleine gleiche Theile getheilt, und durch alle Theilungspuncte, wie vorher, parallele Ebenen mit der Grundfläche, gelegt, ſich vorſtellt: ſo findet man den Innhalt der Pyramide AGDO, aus der Summe aller, unendlich vielen, unendlich kleinen, über den durchgelegten Ebenen aufeinanderſtehenden Prismen, die beſtändig, um unendlich kleine Unterſchiede, von der Spitze herab, größer werden. Setzt man nun ein ſolches unendlich kleines Theilchen des Perpendikels, hier $AK = e$, ſo iſt $AH = 2e$; $AF = 3e$; $AE = 4e$ u. ſ. w. alſo $T = \frac{B}{f^2} 1 . e^2$; $S = \frac{B}{f^2} 2^2 . e^2$; $R = \frac{B}{f^2} . 3^2 . e^2$; $Q = \frac{B}{f^2} . 4^2 . e^2$ &c. und es giebt hier ſo viele Grundflächen, ſo oft e in f enthalten seyn kann, d. i. $\frac{f}{e}$; alſo auch $\frac{f}{e}$ über einander ſtehende Prismen, von welchen jedes ein Product aus ſeiner Baſi in die unendlich kleine Höhe e iſt. Folglich iſt

$$AGDO = eT + eS + eR + eQ \ldots + eB = \frac{e^3 B}{f^2} \left(1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots + \frac{f^2}{e^2}\right) = \frac{e^3 B}{f^2} . \frac{f^3}{3 e^3} \quad [66]$$

oder die Pyramide $AGDO = \frac{1}{3} fB$, dem Drittel des Products aus der Höhe in die Grundfläche; wie aus der Elementargeometrie bekannt iſt.

180. Zuſ. Wäre die Grundfläche B, ſo wie jeder parallele Schnitt mit ihr, ein Kreiß, oder die Pyramide ein Kegel, von der Grundfläche B, der Höhe $AC = f$; ſo ließen ſich für den Kegel eben die Schlüſſe (179)

anbringen, und man fände dieſes Kegels körperlichen Innhalt = $\frac{1}{3}$ fB. Die Verhältniß nehmlich eines Kegels zu einer Pyramide, wenn beyde über gleichgroßen Grundflächen einerley Höhen haben, iſt bekanntermaßen eine Verhältniß der Gleichheit.

181. Anm. Die hier angebrachten Schlüſſe ſind eben dieſelben, deren man ſich (61) bey den Flächen bedient hat; und hierinnen beſteht die ſo vortreffliche Methode der Erſchöpfung (Methodus Exhauſtionum) der Alten, weil man nämlich, wenn man die Prismen auf den größern Baſibus oberwärts, als ſo viel umgeſchriebene, die Prismen auf den kleinern Baſibus (denn jedes Pyramidenſtück hat eine größere und kleinere Baſin) niederwärts, als ſo viel eingeſchriebene Prismata betrachtet, durch die unendliche Anzahl von Prismen, die man hier um und in die Pyramide beſchrieben gedenkt, die Beſchreibung von auſſen und innen gleichſam erſchöpft. Newton hat ſich dieſer Methode, anſtatt der neuern, ſchwankenden Methode des Untheilbaren (Methodus Indiviſibilium) des Cavalerius, häufig bedient. Man pflegt die Erſchöpfungs-Methode auch oft die Methode der Gränzen (Methodus Limitum) zu nennen; denn die gegebene Pyramide iſt hier die Gränze, welcher ſich die Summen aller, immer mehr und mehr vervielfältigen, ein oder umgeſchriebenen Prismatum, ohne Ende nähert, ſo wie (61) die krummlinichte Fläche die Gränze der ein und umgeſchriebenen Rectangel war. Eine umſtändliche Entwickelung, ja ſelbſt eine Erweiterung dieſer Methode, nebſt ihrer mannichfaltigen Anwendung, kann man beym Mac-Laurin, in der Einleitung zu ſeinem großen Werke von den Fluxionen nachleſen. Euklides hat ſich derſelben vorzüglich im 12ten Buche ſeiner Elemente, Archimedes aber faſt durchgängig bey ſeinen Unterſuchungen bedient.

Ich habe übrigens die Auflöſung dieſer Aufgabe etwas umſtändlich auseinander geſetzt, um den Nutzen und Gebrauch dieſer Methode, deren man ſich noch itzt, wiewohl unter einer etwas veränderten Geſtalt, zu Befeſtigung der erſten Gründe der höhern Geometrie mit Vortheil bedient, an einem Exempel zu zeigen; wobey ich den 61. Satz der Geometrie des Hrn. Hofrath **Käſtners** vor Augen gehabt habe. Denn dieſes Buch hat, ſo wie die übrigen mathematiſchen Schriften dieſes großen und erhabenen Meßkünſtlers, meiner Einſicht nach, vor vielen andern Anleitungen den Vorzug, daß man darinn die beſten Methoden der Alten und Neuern geſammlet, und mit einer fruchtbaren Kürze bey den Aufgaben und Lehrſätzen angewendet antrifft. Ein gleiches Lob muß man den Lehrbüchern des Herrn geheimden Raths von **Segner** und des Herrn Profeſſor **Karſten** wiederfahren laſſen; woraus zugleich die Brauchbarkeit einer ſolchen Geometrie, neben des **Euklides** ſeiner, ſattſam erhellet, da außerdem, nach dem einſtimmigen Urtheile aller einſichtsvollen Mathematikverſtändigen, noch bis itzt, keine Geometrie der **Euklideiſchen** den Vorzug hat ſtreitig machen können.

182. Aufg. 39. AM (Fig. 32.) ſey ein Bogen einer krummen Linie, von welchem AP, PM die rechtwinklichten Coordinaten x, y; ſeyn mögen. Wenn ſich die Fläche APM, um die unbewegliche Linie AP, als eine Axe dreht; ſo entſteht ein runder Körper AMM′M. Man ſoll einen Ausdruck für das Element dieſes Körpers ſuchen, aus welchem man nachher den Innhalt deſſelben finden kann.

Aufl. Man ziehe noch eine andere Ordinate pm, ſo wird pm ſowohl als PM, bey der Umdrehung einen Kreiß beſchreiben. Das Cörperſtück nun, zwiſchen dieſen parallelen Kreiſen, iſt größer als ein Cylinder, der den Kreiß mit PM zur Grundfläche hat, aber kleiner als ein Cylinder, über dem Kreiſe mit pm, wenn beyde Pp, die

Dicke des zwiſchen dieſe Cylinder fallenden Körperſtückes, zur gemeinſchaftlichen Höhe haben. Je kleiner nun hier Pp angenommen wird, deſto geringer wird auch der Unterſchied beyder Cylinder seyn; und da man Pp unter alle Gränzen verkleinern kann, ſo findet hier wie (180) eine Näherung dieſer Cylinder ohne Ende ſtatt, ſo daß endlich die Verhältniſſe beyder Cylinder, und folglich des dazwiſchen fallenden Körperſtücks, Verhältniſſe der Gleichheit werden. Das Element des von der umdrehenden Fläche APM beſchriebenen Körpers, iſt alſo einem Cylinder gleich, deſſen Grundfläche ein Kreiß mit PM oder y, die Höhe das unendlich kleine Pp = e, oder das Element der Abſciſſe x, iſt. Wenn alſo die Verhältniß des Durchmeſſers zur Peripherie wie 1 : P geſetzt wird: ſo iſt 2Py der Umfang des Kreiſes mit y, und Py^2 dieſes Kreiſes Fläche, woraus endlich ePy^2 für den Ausdruck des Elementes des runden Körpers folgt.

183. Zuſ. 1. Man ziehe die Tangente TMm, ſo wird der Triangel Tpm bey ſeiner Umdrehung um die Axe AP einen Kegel beſchreiben, deſſen Grundfläche der Kreiß mit pm, die Spitze T iſt. In dieſem Kegel iſt der von Am beſchriebene runde Körper ganz eingeſchloſſen, alſo das Element dieſes Körpers, oder das Körperſtück zwiſchen den unendlich nahen Parallelkreiſen mit pm; PM, als ein abgekürzter Kegel von der unendlich kleinen Höhe Pp, zwiſchen dieſen Parallelebenen, anzuſehen; und ſo bekommt man (Geom. 63. S. 5. Zuſ. wenn man das dortige y hier e, und R, r, hier y ſetzt) für dieſes Element den vorigen Ausdruck ePy^2.

184. Zuſ. 2. Man ſuche alſo, aus der gegebenen Gleichung für die Linie AM, den Werth von y^2 in x auszudrücken, und ſubſtituire denſelben in die vorhergefundene Formel für das Körperelement, ſo findet man dar-

daraus, wenn man die Glieder einzeln ſummirt, (66.79) den Innhalt des von der veränderlichen Fläche APM durch Umdrehung erzeugten Körpers, in x ausgedrückt; und ſo giebt die gehörige Beſtimmung von x, den Innhalt des gegebenen Körpers in bekannten Größen, aber, wegen der damit verwickelten Irrationalzahl P, doch immer nur approximatoriſch.

185. Zuſ. 3. Wenn die Ordinaten P'M = y der gegebenen Linie, auf der Umdrehungs-Axe nicht ſenkrecht ſtünden, ſondern mit ihr einen ſchiefen Winkel MP'p = π machten, ſo wäre der Halbmeſſer der Grundfläche des unendlich kleinen Cylinders, oder des Körperelementes, hier nicht p'm, oder P'M ſondern das Perpendikel pm oder Pm, und ſeine Höhe nicht P'p', ſondern Pp; alſo das Körperelement hier Pp. P. PM²; Nun iſt r: ſin. π = PM'(y): PM = y. $\frac{\text{ſin.}\ \pi.}{r}$; alſo PM² = y². $\frac{(\text{ſin.}\ \pi)^2}{r^2}$, welches in vorhergehenden Ausdruck ſtatt PM² ſubſtituiret, $\frac{e.\ Py^2.\ (\text{ſin.}\ \pi)^2}{r^2}$ für das Element des durch Umdrehung der Fläche entſtandenen Körpers giebt.

186. Aufg. 40. Den körperlichen Innhalt eines ſenkrechten Kegels ABC (Fig. 33.) zu finden.

Aufl. Der Innhalt eines ſolchen Kegels iſt bereits (180.) aus (179) hergeleitet worden. Hier findet man, wenn des Kegels Höhe AD = a, der Grundfläche Halbmeſſer DC = b geſetzt wird, den Innhalt folgender Geſtalt: Für AP = x; PM = y; iſt AD (a): DC (b) = AP (x): PM oder y = $\frac{bx}{a}$ die Gleichung für die gerade Linie AM, die hier zugleich die unbeſtimmte Seite des

Kegels abgiebt. Alſo iſt $y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2}$, und, den Werth von x^2 in die Formel (182.) ſubſtituirt, $\frac{ePb^2x^2}{a^2}$ das veränderliche Element des Kegels, folglich (66) $\frac{Pb^2x^3}{3.a^2}$ der unbeſtimmte Innhalt deſſelben, aus welchem, $x = a$ geſetzt, der Innhalt des gegebenen Kegels $ABC = \frac{1}{3} a. Pb^2$ folgt.

187. Zuſ. Wäre des Kegels Axe $AD = x$, unter einen ſchiefen Winkel $= \pi$, gegen die Grundfläche geneigt: ſo wäre, für einen Perpendikel AE, von des Kegels Spitze auf die Grundfläche, $1 : x = \sin. \pi : AE$, oder $AE = x. \sin. \pi$, alſo der Kegel $ABC = \frac{1}{3} AE. Pb^2 = \frac{1}{3} x \sin. \pi. Pb^2$, und für $x = a$; $ABC = \frac{1}{3} a\, Pb^2 \sin. \pi$. Für einen ſenkrechten Kegel wird $\sin. \pi = 1$; alſo ſein Innhalt $\frac{1}{3} a\, Pb^2$ wie 186.

188. Aufg. 41. Den unbeſtimmten Innhalt jedes, durch Umdrehung eines Kegelſchnitts um ſeine Axe, entſtandenen Sphäroids S, allgemein auszudrücken, und daraus ein gegebenes Sphäroid zu beſtimmen.

Aufl. Aus (182) kommt, für die große Axe a; und den Parameter p; $S = P \left(\frac{px^2}{2} \mp \frac{px^3}{3a}\right) = \frac{Ppx^2}{6a} \overline{(3a \mp 2x)} = Ppx^2 \left(\frac{1}{2} \mp \frac{1}{3} \frac{x}{a}\right)$ für alle Kegelſchnitte. Hieraus folgt:

1) für ein ganzes elliptiſches Sphäroid um die große Axe a, für welches $x = a$ wird, aus dem obern Zei-

Zeichen, $S = \frac{Ppa^2}{6} = \frac{P}{6} \cdot \frac{c^2}{a} \cdot a^2 = \frac{Pc^2a}{6}$ (Alg. 366)

Für die Kugel vom Durchmeſſer a, iſt hier auch c oder

$p = a$; alſo der Kugel Innhalt $S' = \frac{Pa^3}{6}$; und beyder Körper Verhältniß, oder $S : S' = p : a = c^2 : a^2$; wo c die kleine Axe des elliptiſchen Sphäroids bedeutet.

2) für ein elliptiſches Sphäroid Σ um die kleine Axe c, für welches $y^2 = qz - \frac{qz^2}{c}$ die Gleichung der umdrehenden elliptiſchen Fläche wäre, wo z die Abſciſſe vom Scheitel auf der kleinen Axe, y die zugehörige Ordinate, und $q = \frac{a^2}{c}$ den Parameter auf der kleinen Axe, bedeutet, (56) hätte dieſe Gleichung einerley Geſtalt mit der gewöhnlichen Ellipſen Gleichung für die Haupt- oder große Axe, ſo daß man in dem vorher gefundenen Ausdrucke des Sphäroids (188, 1) ſtatt der dortigen a; c; p; x; hier nur c; a; q; z; ſubſtituiren, und endlich $z = c$, ſo wie dort $x = a$ ſetzen darf, um den verlangten körperlichen Innhalt in bekannten Größen zu finden. Dieſes giebt für den unbeſtimmten Innhalt $\frac{Pqz^2}{6c}(3c - 2z)$; alſo, $z = c$ geſetzt, das ganze Sphäroid $\Sigma = \frac{Pqc^2}{6} = \frac{Pa^2c}{6}$. Für eine Kugel Σ′ vom Durchmeſſer c, käme

hier $\Sigma' = \frac{Pc^3}{6}$, alſo $\Sigma : \Sigma' = q : c = \frac{a^2}{c} : c = a^2 : c^2$, alſo iſt auch $S : S' = \Sigma' : \Sigma$

3) Ein Cylinder C, der die große Ellipſenaxe a zum Durchmeſſer der Grundfläche, die kleine Axe c zur Höhe hätte, würde $\frac{Pa^2c}{4}$ zum körperlichen Innhalte haben. Alſo wäre $\Sigma : C = \frac{Pa^2c}{6} : \frac{Pa^2c}{4} = 2 : 3$. Eben ſo wäre, für einen Cylinder C', von dem Durchmeſſer c der Höhe a; $S : C' = \frac{Pc^2a}{6} : \frac{Pc^2a}{4} = 2 : 3$; alſo in beyden Fällen das elliptiſche Sphäroid, ſo wie die Kugel, $\frac{2}{3}$ von einem umſchriebenen Cylinder.

4) für das Hyperboliſche Conoid von der Höhe $x = a$, dieſes Körperſtückes Innhalt $= \frac{5}{6} Ppa^2$; alſo fände man das Conoid aus der gleichſeitigen Hyperbel, für welche $p = a$, bey eben dieſer Höhe $\frac{5}{6} Pa^3$; wenn man nämlich in dem unbeſtimmten Innhalte $\frac{Px^2}{6}(3a + 2x)$ eines ſolchen Körpers, $x = a$ ſetzt.

5) für das paraboliſche Conoid, für welches in dem allgemeinen Ausdrucke $Ppx^2 (\frac{1}{2} \mp \frac{1}{3} \frac{x}{a})$ die Axe a unendlich, alſo $\frac{1}{3} \frac{x}{a} = 0$ iſt, der unbeſtimmte Innhalt $\frac{Ppx^2}{2}$, oder, y^2 ſtatt px geſetzt, $\frac{Py^2x}{2}$; Ein ſolches

Stück

Stück des paraboliſchen Conoids iſt alſo die Hälfte von einem umſchriebenen Cylinder Py^2x, der mit dem Conoid einerley Höhe (x) und Grundfläche (Py^2) hat. Dieſes Conoid hat zu einem in ihm eingeſchriebenen Kegel, eben die Verhältniß, welche ein Cylinder, deſſen Höhe und Durchmeſſer einander gleich ſind, zu ſeiner eingeſchriebenen Kugel hat.

6) Für unendliche Parabeln, $y^m = p^n x^k$, wäre $y = p^{\frac{n}{m}} x^{\frac{k}{m}}$ alſo $y^2 = p^{\frac{2n}{m}} x^{\frac{2k}{m}}$; und für Conoiden ſolcher Parabeln das Element (182) $ePy^2 = ePp^{\frac{2n}{m}} x^{\frac{2k}{m}}$ und (66) der unbeſtimmte Innhalt dieſer Conoiden

$$= \frac{Pp^{\frac{2n}{m}} x^{\frac{2k}{m}+1}}{\frac{2k}{m}+1} = \frac{mPp^{\frac{2n}{m}} x^{\frac{2k+m}{m}}}{2k+m}$$

$= \frac{m}{2k+m} \cdot Py^2x$, oder $\frac{m}{2k+m}$ Theile des umſchriebenen Cylinders.

189. Zuſ. Betrachtungen über die durch Umdrehung eines Kegelſchnitts um eine unbewegliche Axe entſtehenden Körper, hat bereits Archimedes in einem beſondern Buche von den Kegel- und Kugel-ähnlichen Figuren, angeſtellt, in welchem er, nebſt andern Unterſuchungen, die Verhältniß dieſer Körper gegen einander feſtgeſetzt, und die Vergleichung der ganzen Körper ſowohl, als derer, durch verſchiedentlich gegen die Umdrehungs-Axe geneigte Flächen, von ihnen abgeſchnittenen Theile, mit Kegeln oder Cylindern, die gleiche Höhen und

Grundflächen mit den ſphäroidiſchen und conoidiſchen Körpern haben, beſtimmt und berichtigt.

190. Aufg. 42. Die rechtwinklichte Hyperbel GAN (Fig. 24.) deren Gleichung $yx = \alpha^2$ für CI $= \alpha$; $CD = x$; $DE = y$; drehe ſich um die Aſymptote CF; Man ſoll den Innhalt des auf dieſe Art erzeugten Körpers finden.

Aufl. Weil $y = \frac{\alpha^2}{x} = \alpha^2 x^{-1}$, ſo iſt $y^2 = \alpha^4 x^{-2}$; alſo das Element dieſes Körpers (182) oder $ePy^2 = eP\alpha^4 x^{-2}$, und der Innhalt deſſelben $= \frac{P\alpha^4 x^{-1}}{-1} = -\frac{P\alpha^4}{x}$, alſo negativ, wie die Fläche (87. p. 65.) auf der Aſymptote. Dieſes Körpers Innhalt verſchwindet hier für $x = \infty$, ſo wie dort die Fläche, und gehört alſo der Ausdruck $-\frac{P\alpha^4}{x}$, dem unendlich langen Körper zu, deſſen Spitze ſich, über dem Kreiſe mit DE, als einer Grundfläche, nach F; G; zu erſtreckt; welches hier durch das negative Zeichen angedeutet wird, das ſich nur auf die Lage des Körpers, nicht auf ſeinen Innhalt oder ſeine Größe beziehen kann.

191. Zuſ. 1. Dieſes Körpers Innhalt iſt alſo $\frac{P\alpha^4}{x} = \frac{P\alpha^4}{CD}$. Für $CD = CI$, oder $x = \alpha$, kommt des Körpers, deſſen Grundfläche ein Kreiß mit CI iſt, Innhalt $= \frac{P\alpha^4}{CI} = P\alpha^3$. Beyder Körper Differenz

$P\alpha^3$

$$P\alpha^3 - \frac{P\alpha^4}{x} \text{ oder } \frac{P\alpha^3}{x}(x-\alpha) \text{ d. i. hier } \frac{P.CI^c}{CD}$$

$$(CD - CI) \text{ oder } \frac{P.CI^c.ID}{CD}$$ giebt das Stück dieſes Körpers, das zwiſchen den parallelen Kreiſen, welche die Ordinaten I A und DE beſchreiben, enthalten iſt.

192. Zuſ. 2. Für $x = 0$, wird $\frac{P\alpha^4}{x} = \frac{P\alpha^4}{0} = \infty$, für den unendlich hohen Körper, über der unendlich groſſen Grundfläche, welche die Aſymptote CQ, als ein Halbmeſſer betrachtet, bey der Umdrehung um die Axe CF beſchreibt. Bey dieſem unendlich großen Körper iſt alſo das Stück, zwiſchen den Kreiſen mit DE und der Aſymptote CQ, das zunächſt an das zwar unendlich lange aber doch dem Innhalte nach endliche Körperſtück, über der Kreisfläche mit DE, gränzt, unendlich groß. Beyde Stücke dieſes Körpers ſind alſo unendlich lang, aber das eine iſt endlich, das andere unendlich groß, weil ſonſt beyder Summe nicht unendlich ſeyn könnte.

V.

Von der

Quadratur der krummen Seitenflächen,

derer

durch Umdrehung einer krummen Linie entſtandenen runden Körper.

193. Aufg. 43.

Das Element einer durch Umdrehung einer Linie um ihre Axe entſtandenen krummen Fläche (Fig. 32.) zu finden.

Aufl. Indem der Bogen AM = A mit ſeiner Ordinate MP, durch Umdrehung um die unbewegliche Axe AP, einen Körper (182) erzeugt: beſchreibt das Bogenelement Mm, einen ringförmigen Streifen, der das Körperelement als eine Seiten-Fläche umgiebt. Dieſes Streifens Grundlinie iſt alſo die Peripherie eines Kreiſes mit PM oder y, ſeine Höhe, das Element Mm des Bogens AM; alſo der Ausdruck für dieſen unendlich ſchmalen Streifen, oder das geſuchte Element der krummen Fläche = 2Py. Mm = 2Pe. Norm. A; wenn man den Werth von Mm aus 155, 2. ſubſtituirt.

194. Zuſ. Man könnte, ſo wie das Körperſtück zwiſchen den Parallelkreiſen mit den Halbmeſſern pm, PM, als ein abgekürzter Kegel betrachtet worden iſt, auch hier die Seitenfläche dieſes Körperſtückes als den Unterſchied zwoer ſenkrechten Kegelflächen, über eben dieſen Kreiſen anſehen. Aus Geom. 64. S. 4. Z. fände man dieſer Fläche Innhalt = P. Mm (PM + pm) wo Mm

des

des abgekürzten Kegels Seite bedeutet. Wird nun dieſelbe unendlich klein angenommen, ſo fällt das Bogenelement Mm mit dieſer Seite, oder dem Tangentenelemente Mm zuſammen, (155) und ſo kommt, weil auf den Fall pm = PM = y angenommen werden darf, das Element der krummen Fläche = P. Mm. 2PM = 2Py. Mm = 2Pe. Norm. A; wie (193)

195. Aufg. 44. Die krumme Seitenfläche eines ſenkrechten Kegels ABC (Fig. 33.) zu finden.

Aufl. Nach der Bezeichnung (186) kömmt PM oder $y = \frac{bx}{a}$, für die unbeſtimmte veränderliche Seite des Kegels, durch deren Umdrehung die Kegelfläche mit dem Kegel erzeugt wird. Nun iſt (39) der geraden Linie $y - \frac{bx}{a} = 0$; Subnormale $= \frac{by}{a}$; alſo $y^2 + \frac{b^2y^2}{a^2}$ das Quadrat der Normale, folglich die Normale $= \frac{y}{a}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{bx}{a^2}\sqrt{a^2+b^2}$, und 2Pe. Norm. A $= 2Pe.\frac{bx}{a^2}\sqrt{a^2+b^2}$, dem Elemente der krummen Fläche; alſo (66) $\frac{Pbx^2}{a^2}\sqrt{a^2+b^2}$, der veränderlichen krummen Seitenfläche des Kegels gleich; woraus, $x = a$ geſetzt, die Seitenfläche des gegebenen Kegels ABC $= Pb\sqrt{a^2+b^2}$ folgt.

196. Zuſ. Weil $\sqrt{a^2+b^2} = AC$, der Seite des Kegels, und Pb der halben Peripherie, des mit dem

Halb-

Halbmeſſer DC = b beſchriebenen Kreiſes (der Grundfläche des Kegels) gleich iſt: ſo findet man die krumme Seitenfläche eines ſenkrechten Kegels, aus dem Producte der halben Peripherie ſeiner Grundfläche in des Kegels Seite; wie bereits aus den Elementen bekannt iſt. Die Fläche des abgekürzten ſenkrechten Kegels, findet man hieraus leicht. Die Fläche eines ſchiefen oder ungleichſeitigen Kegels hingegen, iſt ſchon ſchwerer zu finden.

197. Aufg. 45. Die Fläche einer Kugel zu quadriren.

Aufl. Für den Durchmeſſer a iſt des beſchreibenden Kreiſes Normale $= \frac{1}{2}$ a (171) alſo das Flächen-Element oder 2 Pe. Norm. A. = Paex°, woraus (66) Pax für die krumme Fläche eines Kugelabſchnitts folgt, deſſen Höhe x iſt. Für x = a, kommt alsdenn Pa^2 für die ganze Kugelfläche. Setzte man den Halbmeſſer der Kugel, oder $\frac{1}{2}a = r$, ſo wäre $Pa^2 = 4 . Pr^2$; alſo die Kugelfläche ſo groß als vier größte Kreiſe der Kugel (Geom. 65. S.)

198. Aufg. 46. Den Innhalt der krummen Fläche Q eines paraboliſchen Afterkegels (Fig. 32.) zu finden.

Aufl. Für die Parabel iſt (44) Norm. $A = \frac{1}{2}$ $\sqrt{(p^2 + 4px)}$ alſo 2 Pe. Norm. $A = 2Pe\frac{1}{2}\sqrt{p^2+4px}$ $= Pe(p^2 + 4px)^{\frac{1}{2}}$, dem Elemente der paraboliſchen Kegelfläche. Man ſetze $(p^2 + 4px)^{\frac{1}{2}} = z$; und ſuche e, das Element der Abſciſſe x, nun in ε, dem Elemente der Ordinate z, vermittelſt der Formel (158) $\frac{e}{\text{Subtang.}}$

=

$= \frac{\varepsilon}{z}$ auszudrücken. Aus dem Angenommenen folgt $p^2 + 4px = z^2$ oder $z^2 - 4px - pp = 0$; und hieraus (21) dieſer krummen Linie Subtang. $= \frac{2z^2}{4p}$.

Weil nun $e = \frac{\varepsilon . \text{Subtang.}}{z}$, ſo kommt, den Werth dieſes Subtangenten ſubſtituiret, $e = \frac{\varepsilon . 2z^2}{4pz} = \frac{\varepsilon z}{2p}$; alſo

$Pe(p^2 + 4px)^{\frac{1}{2}} = \frac{P\varepsilon z . z}{2p} = \frac{P\varepsilon z^2}{2p}$ und

$\int (Pe(p^2 + 4px)^{\frac{1}{2}} = \frac{P}{2p} \int \varepsilon z^2 = \frac{Pz^3}{6p}$ (66)

Dieſes giebt, ſtatt z ſeinen Werth geſetzt,

$$Q = \frac{P(p^2 + 4px)^{\frac{3}{2}}}{6p} + \text{Conſt.}$$

Soll nun hier Q für $x = 0$ verſchwinden (denn in dieſem Puncte, welcher der Scheitel des paraboliſchen Afterkegels iſt, hat die krumme Fläche keine endliche Größe)

ſo muß $0 = \frac{P(p^2 + 0)^{\frac{3}{2}}}{6p} + \text{Conſt.}$ oder

$$\text{Conſt.} = - \frac{Pp^{2.\frac{3}{2}}}{6p} = - \frac{Pp^3}{6p}, \text{ alſo}$$

$$Q = \frac{P([p^2 + 4px]^{\frac{3}{2}} - p^3)}{6p}$$ ſeyn. Eben ſo kömmt, y^2 ſtatt px geſetzt,

Q =

$$Q = \frac{P([p^2+4y^2]^{\frac{3}{2}} - p^3)}{6p}$$ für den veränderlichen Innhalt der krummen Fläche des paraboliſchen Afterkegels.

199. Zuſ. 1. Wenn man in dem Ausdrucke des Flächenelementes $Pe(p^2+4px)^{\frac{1}{2}}$; die Irrationalgröße in eine unendliche Reihe (88) aufgelöſet, und alles in Pe multipliciret hätte, ſo hätte man

$$\text{Elem. } Q = Pe\left(px^0 + 2x - \frac{2x^2}{p} + \frac{4x^3}{p^2} - \frac{10x^4}{p^3} + \frac{28x^5}{p^4} - \frac{84x^6}{p^5} + \frac{264x^7}{p^6} \ldots\right)$$ und

hieraus (66)

$$Q = P\left(px + x^2 - \frac{2x^3}{3p} + \frac{x^4}{p^2} - \frac{2x^5}{p^3} + \frac{14x^6}{3p^4} - \frac{12x^7}{p^5} + \frac{33x^8}{p^6} \ldots\right)$$ für ein kleines x

gefunden. Für ein großes x hätte man $(4px+p^2)^{\frac{1}{2}}$ entwickeln müſſen (110) Der hier gefundene Ausdruck für Q, iſt nun dem vorigen (198) vollkommen gleich; denn es iſt das dortige

$$(p^2+4px)^{\frac{3}{2}} = p^3 + 6p^2x + 6px^2 - 4x^3 + \frac{6x^4}{p} + \frac{12x^5}{p^2} + \frac{28x^6}{p^3} - \frac{72x^7}{p^4} + \frac{198x^8}{p^5} \ldots$$

wovon p^3 abgezogen, und das Ganze mit $6p$ dividirt, die

vorige

vorige Reihe: $px + x^2 - \frac{2x^3}{3p} + \frac{x^4}{p^2} - \frac{2x^5}{p^3}$ &c. giebt, die in P multiplicirt, den Werth der unbeſtimmten krummen Fläche Q ausdrückt.

200. Zuſ. 2. Geſetzt man hätte die Reihe $p^3 + 6p^2x + 6px^2 - 4x^3 + \frac{6x^4}{p}$ &c. $= A$, die daher entſtehet, wenn man die Reihe $px + x^2 - \frac{2x^3}{3p} + \frac{x^4}{p^2} \dots$ (199) durchgehends mit $6p$ multipliciret, und p^3 dazu addirt, irgendwo gefunden, und man vermuthete oder man wüßte es gewiß, daß die Reihe A nichts anders als eine entwickelte binomiſche Wurzelgröße wäre: ſo fände man die beyden unbekannten Theile α, β, und den Exponenten in dieſer Wurzelgröße, aus den drey erſten Gliedern der Binomial-Formel $(\alpha + \beta)^m = \alpha^m + m\alpha^{m-1}\beta + \frac{m.\ m-1}{1.\ 2.}\alpha^{m-2}\beta^2 \dots$ Denn hier wäre I) $\alpha^m = p^3$; II) $m\alpha^{m-1}\beta = 6p^2x$; III) $\frac{m.\ m-1}{1.\ 2.}\alpha^{m-2}\beta^2 = 6px^2$; und ſo wäre alſo, für die drey unbekannten Größen α, β, m, auch drey, von einander unabhängige, Gleichungen gegeben, aus denen ſich dieſelben nothwendig müſſen beſtimmen und finden laſſen. Aus II. und III. kommt $\frac{36p^4x^2}{m^2\alpha^{2m-2}}$ $= \beta^2 = \frac{12px^2}{m.\ m-1.\ \alpha^{m-2}}$ und hieraus $\alpha^m =$

M (3m-3)

$\frac{(3m-3)}{m} p^3 = p^3$, dem Werthe für α^m aus I. und ſo kommt der Exponent $m = \frac{3}{2}$; Folglich iſt α^m oder $\alpha^{\frac{3}{2}}$ $= p^3$ und $\alpha = p^2$; alſo $\beta = \frac{6p^2x}{m.\alpha^{m-1}} = \frac{6p^2x}{\frac{3}{2}(p^2)^{\frac{3}{2}-1}}$ $= 4px$; und endlich $(\alpha + \beta)^m = (p^2 + 4px)^{\frac{3}{2}}$ wo die erſten drey Glieder der zu entwickelnden Wurzelgröße $(p^2 + 4px)^{\frac{3}{2}}$ ganz gewiß mit den erſten drey Gliedern der Reihe A, und ſo auch die übrigen Glieder aus dieſem Irrationalausdrucke, mit den übrigen Gliedern von A, übereinkommen werden, wenn A eine Wurzelreihe iſt. Dieſe Erfindung der binomiſchen Wurzelgröße durch die aus ihr entwickelten Reihe, kann in gewiſſen Fällen ſehr nützlich ſeyn.

201. Zuſ. 3. Die drey Gleichungen (200) werden nämlich die Größen α, β, m immer beſtimmen, auch auf den Fall, wenn die Reihe A keine Wurzelreihe wäre. Man findet hier nämlich einen Irrationalausdruck, welcher, in eine Reihe aufgelöſet, die drey erſten Glieder von A nach ihrer Ordnung enthält; die übrigen Glieder der Reihe können von den übrigen Gliedern in A unterſchieden ſeyn, weil das Verfahren (200) eigentlich nur drey Glieder beſtimmt. Die Vergleichung alſo beyder Reihen, der erſt gegebenen, und der aus dem gefundenen Irrationalausdrucke neuentwickelten Reihe, muß hier entſcheiden, ob der gefundene Irrationalausdruck mit der gegebenen Reihe A einerley ſey; und daß wird allemal ſeyn, wenn A würklich eine Wurzelreihe iſt.

VI.

VI.

Anhang einiger Aufgaben, die Kegelſchnitte betreffend.

202. Aufg. 47.

Auf einer (Fig. 34.) von zwoen, einander rechtwinklicht durchſchneidenden Linien QC, DE, nehme man einen Punct F nach Gefallen. GH ſey ein Stück einer Linie, in welcher alle Puncte gegen die Linie QC, und den Punct F in der andern Linie DE, eine ſolche Lage haben, daß ein Perpendikel MB zu dem correſpondirenden MF beſtändig in einer und eben derſelben Verhältniß (r:q) ſey. Man ſoll die Gleichung für die Linie GH, oder den geometriſchen Ort für den Punct M ſuchen.

Aufl. Man theile DF nach der Verhältniß r:q oder BM:MF, und ſetze, wenn A der Theilungspunct iſt, $DA = m$; $AF = n$, ſo iſt $BM : MF = r : q = m : n$; Man fälle ferner das Perpendikel MP, ſo iſt für $AP = x$ und $MP = y$; $FP = x - n$; $FM = \sqrt{(x-n)^2 + y^2}$ und $BM = DP = DA + AP = m + x$. Da nun nach der Bedingung der Aufgabe durchgängig

$$BM^2 : FM^2 = m^2 : n^2$$

$$\text{d. i. } (m+x)^2 : (x-n)^2 + y^2 = m^2 : n^2$$

oder $(m^2+2mx+x^2):(n^2-2nx+x^2+y^2)=m^2:n^2$

ſo iſt $y^2=\dfrac{(2mn^2+2m^2n)x+(n^2-m^2)x^2}{m^2}$

oder $y^2=\dfrac{2n(n+m)x}{m}+\dfrac{n^2-m^2}{m^2}x^2$

der geometriſche Ort für den Punct M, oder die Gleichung für die Linie GH, in welcher alle Puncte die geforderte Eigenſchaft haben, und die nach Beſchaffenheit des Verhältniſſes m : n oder r : q verſchieden iſt.

203. Zuſ. 1. Nimmt man an, daß MB gegen MF unendlich klein, alſo $m=\frac{1}{\infty}$, oder $\frac{1}{m}=\infty$ ſey: ſo verändert ſich die Gleichung (202) in $y^2=2n^2\infty x+n^2\infty^2x^2$. Hier verſchwindet nun das Glied $2n^2\infty x$, als ein unendlich kleineres, gegen $n^2\infty^2x^2$, und bleibt alſo $y^2=n^2\infty^2x^2$ das iſt $y=n\infty x=\frac{nx}{m}$, wenn man hier $\frac{1}{m}$ für ∞ ſetzt; und gehört alſo die Gleichung in dem Falle für eine gerade Linie.

204. Zuſ. 2. Setzt man aber in der Gleichung (202) $m=\infty$, ſo wird aus ihr, die Glieder weggeworfen, die gegen die unendlich größern verſchwinden, $y^2=\frac{2nmx}{m}-\frac{m^2}{m^2}x^2$, oder $y^2=2nx-x^2$, die Gleichung für einen Cirkel, von dem Durchmeſſer 2n. Die geſuchte Linie iſt alſo ein Cirkel, wenn BM gegen MF unendlich groß iſt.

205.

205. Zuſ. 3. Wenn aber n ſowohl als m endlich ſind, auf welchen Fall ſich die Aufgabe (202) eigentlich bezieht, ſo iſt, wenn $n = m$ angenommen wird, $\frac{n^2 - m^2}{m^2} = 0$, alſo $y^2 = \frac{2n(n+m)}{m} x$. Für $n > m$ iſt $\frac{n^2 - m^2}{m^2}$ poſitiv, aber für $n < m$ iſt $\frac{n^2 - m^2}{m^2}$ negativ; folglich in der Gleichung $y^2 = \frac{2n(n+m)}{m} x + \frac{(n^2 - m^2)}{m^2} x^2$, der Coefficient von x^2 zweydeutig. Setzt man nun $\frac{2n(n+m)}{m} = p$, und $\frac{2mn}{n-m} = \pm a$, ſo iſt $\frac{n^2 - m^2}{m^2} = \pm \frac{p}{a}$ und, für oberwähnte drey Fälle, $y^2 = px$; $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$; oder endlich $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$; daß alſo die Eigenſchaft einer beſtändigen Verhältniß der Linien BM, FM (202) allen Kegelſchnitten gemein iſt, die ſich auch durch die Beſchaffenheit dieſer Verhältniß, nachdem ſolche eine Verhältniß der Gleichheit, (ratio aequalitatis) eine kleinere oder größere Verhältniß der Ungleichheit (ratio minor vel maior inaequalitatis) iſt, unterſcheiden laſſen.

206. Anm. Die Linie QC heißt die Directrix des Schnitts, denn ſo pflegt man überhaupt jede Linie in der Geometrie zu benennen, welche die Bewegung einer andern

Linie oder Fläche beſtimmt, durch welche eine Linie, Fläche oder ein Körper beſchrieben wird. Die Beſtimmung dieſer Directrix, für einen gegebenen Kegelſchnitt, aus der Tangente, iſt (51) gezeigt worden. Die Directrix iſt aber nicht allemal eine gerade Linie; denn wenn man ſtatt QC irgend eine krumme Linie, z. E. einen Kreiß zur Directrix annähme, und eine Linie ſuchte, die in allen ihren Puncten von dem Umfange dieſes Kreiſes, und einem willkührlich angenommenen, der Lage nach beſtimmten Puncte, jedesmal gleich weit entfernt wäre: ſo würde man wieder auf die Kegelſchnitte kommen; wobey es auf die Lage des angenommenen Punctes, ob ſelbiger innerhalb oder außerhalb des Kreißumfanges ſich befindet, ob er der Peripherie unendlich nahe, oder unendlich von ihr entfernt liegend, angenommen wird, hauptſächlich ankommt. Setzt man den Halbmeſſer des Kreiſes unendlich, ſo erhält man wieder die geradlinichte Directrix QC, und man begreift leicht, daß die Beſchreibung der Kegelſchnitte, vermittelſt des Kreiſes und eines angenommenen Punctes, noch allgemeiner ſey, als die vorhergehende (202) weil dieſe ſich aus jener herleiten läßt, und verſchiedene Eigenſchaften der Kegelſchnitte aus ihr unmittelbar folgen, oder ſich doch durch ſehr leichte Schlüſſe überſehen laſſen. Die geometriſche Conſtruction der Kegelſchnitte nach dieſer Methode, mit allen dabey vorkommenden Beſtimmungen, allhier zu zeigen, würde zu weitläuftig, und ſelbſt wider die Abſicht ſeyn, die ich mir hier vorgeſetzt habe. Sie hat übrigens keine Schwürigkeit, und man kann ſolche in des Herrn Pater Scherffers Geom. P. III. Art. III. umſtändlich auseinander geſetzt, nachleſen.

207. Aufg. 48. In dem Rechtecke ACDE (Fig. 35.) deſſen Höhe CD, und AC die Baſis iſt, theile man die Linien AD; AE; eine in ſo viel Theile ein als die andere. Durch d, einen willkührlichen Theilungspunct in AD, richte man auf

AD

AD das Perpendikel dz auf, und ziehe aus D die Linie Dg, nach dem zugehörigen Theilungspuncte g der Linie AE; daß nämlich $Dd : DA = Eg : EA$. Die Linien Dg, dz ſchneiden alsdenn einander in z. Man ſoll die krumme Linie ſuchen, die des Punctes z geometriſcher Ort iſt.

Aufl. Man ſetze $Dd = x$; $dz = y$; $AE = CD = a$; $AC = ED = b$; und ſuche eine Gleichung zwiſchen x und y

Nun ſey AD oder $\sqrt{a^2 + b^2} = s$; nach der Conſtruction iſt $AD\,(s) : Dd\,(x) = EA\,(a) : Eg = \frac{ax}{s}$, alſo $EA - Eg = \frac{a(s-x)}{s} = Ag$. Man ziehe ferner das Perpendikel gH, ſo iſt $\triangle gAH \backsim \triangle DAE$, folglich $DA\,(s) : AE\,(a) = Ag\,\frac{[a(s-x)]}{s}$: $AH = \frac{a^2 s - a^2 x}{s^2}$ alſo $AD - AH = \frac{s^3 - a^2 s + a^2 x}{s^2} = \frac{b^2 s + a^2 x}{s^2} = HD$; und eben ſo $DA\,(s) : DE\,(b) = Ag\,\frac{[a(s-x)]}{s} : gH = \frac{ab(s-x)}{s^2}$; und weil auch $\triangle DHg \backsim \triangle Ddz$, ſo iſt endlich:

$$DH\,\frac{[a^2 x + b^2 s]}{s^2} : Hg\,\frac{[ab(s-x)]}{s^2} = Dd$$

$(x) : dz$ oder $y = \frac{abx(s-x)}{a^2 x + b^2 s}$ folglich die zu ſu-

chende krumme Linie, eine Linie der zweyten Ordnung oder ein Kegelſchnitt.

Da die Ordinate y hier eine einförmige Function der Abſciſſe x iſt: ſo kann die Linie unmöglich ein Cirkel oder eine Ellipſe ſeyn; weil in beyden die Abſciſſenlinie niemals eine ſolche Lage haben kann, daß zu jeder Abſciſſe nur eine Ordinate, wie hier, gehörte. Für $y = 0$ wird $x = 0$ oder $x = s = AB$; (Fig. 36.) und ſchneidet alſo die krumme Linie die Abſciſſenaxe ST in den Puncten A und B. So lange ein poſitives x kleiner iſt als s, ſind die Ordinaten poſitiv. Für ein poſitives x hingegen, daß größer iſt als s, oder für ein negatives x, das nicht größer iſt als $\frac{b^2 s}{a^2}$, ſind die Ordinaten negativ, und werden für $x = + \infty$, oder $x = - \frac{b^2 s}{a^2} = AH$, ſelbſt unendlich; daß alſo $WABO$ zween unendliche, dieſen Abſciſſen zugehörige, Schenkel der krummen Linie ſind. Für $x > - \frac{b^2 s}{a^2}$ wird in der Gleichung Zähler und Nenner negativ; folglich kommen für dergleichen negative Abſciſſen, wieder poſitive Ordinaten, und alſo noch zween andere unendliche Schenkel IMK, über der Abſciſſenaxe ST, weil auch für $x = - \infty$, die Ordinate y unendlich wird. Die krumme Linie iſt alſo eine Hyperbel, und RG eine von ihren Aſymptoten. Auch ſiehet man ſogleich, daß es hier ein Maximum und Minimum in den Ordinaten, rechts und linker Hand von dem Anfangspuncte A, geben müſſe. Für beyde Fälle iſt hier, wie durchgehends bey den Kegelſchnitten, die Tangente an dieſe Puncte, mit der Abſciſſenaxe ST parallel, alſo die Subtangente $= \infty$, ſo wie die Sub-

normale

normale $= 0$. Man ſuche alſo für die Gleichung

$y = \frac{abx(s-x)}{a^2x+b^2s}$ d. i. für $a^2xy + b^2sy - absx + abx^2 = 0$; die Subtangente PT, (21) ſo findet man

$PT = \frac{(a^2x+b^2s)y}{abs - a^2y - 2abx}$; alſo $PT = \infty$, d. i.

$abs - a^2y - 2abx = 0$ geſetzt, $y = \frac{bs-2bx}{a}$.

Setzt man nun hier ſtatt y, den Werth dafür, aus obiger Hauptgleichung, ſo bekommt man hierdurch die beſtimmte Gleichung, $x^2 = \frac{-2b^2sx + b^2s^2}{a^2}$, wofür die beyden Werthe von

$x = -\frac{b^2s}{a^2} \pm \sqrt{\frac{(b^4s^2+a^2b^2s^2)}{a^4}}$ d. i.

$x = -\frac{b^2s}{a^2} + \frac{bs^2}{a^2}$ kommen, von welchen der eine,

$\frac{bs(s-b)}{a^2} = Ap$, die Abſciſſe für das Maximum

$\frac{bs(a^2+2b^2-2bs)}{a^3} = \frac{bs(s-b)^2}{a^3}$ oder für die

zu Ap gehörige Ordinate pm; der andere $\frac{-bs(b+s)}{a^2}$

$= AP$, die Abſciſſe für das Minimum $=$

$\frac{bs(a^2+2b^2+2bs)}{a^3} = \frac{bs(b+s)^2}{a^3}$ oder für die zu

A P gehörige Ordinate PM giebt: ſo daß ſich im erſten Falle, Abſciſſe und Ordinate zu einander, wie a:(s—b) im zweyten wie a: (s+b) verhalten, alſo die Ordinate, wenn ſie ein Gröſztes wird, hier kleiner iſt, als da, wo ſie ein Kleinſtes iſt.

208. Zuſ. 1. Will man die Hyperbel ſelbſt verzeichnen, ſo nehme man (Fig. 36.) auf der Abſciſſenlinie ST die Linien $AB = s$; $AH = \frac{b^2 s}{a^2}$; ſo iſt RG rechtwinklicht durch H mit ST, die eine Aſymptote, auch ſind A; B; zween Puncte der Hyperbel. Man nehme ferner $BD = AH$, ſo iſt D ein Punct der Abſciſſenaxe, durch welchen die andere Aſymptote gehen muß (Alg. 414.) Ihre Lage zu beſtimmen, ſetze man die Ordinate $PM = \frac{bs(b+s)^2}{a^3}$, rechtwinklicht auf die Abſciſſe $AP = \frac{bs(b+s)}{a^2}$, ſo iſt M ein Punct der entgegengeſetzten Hyperbel, und MR, mit ST parallel gezogen, eine Tangente an dieſen Punct, weil PM ein Kleinſtes. Man verlängere MR nach Q, bis $MQ = MR$, ſo iſt auch Q ein Punct in der zweyten Aſymptote, und ihre Lage nunmehr durch die Puncte Q, D, beſtimmt gegeben, ſo daß man aus den gegebenen Aſymptoten und Hyperbelpuncten die Hyperbel ſelbſt (Alg. 415) gar leicht verzeichnen kann.

209. Zuſ. 2. Der Durchſchnitt beyder Aſymptoten, beſtimmt das Centrum C, und den Aſymptotenwinkel $DCH = 2k$; durch deſſen Halbirung $ECH = ECD = k$; man die Lage der großen Axe $EK = \alpha$, ſo wie durch folgende Berechnung, ſo wohl dieſer als der kleinen

nen Axe GF $= \gamma$; und des Parameters β; Größe findet.

Denn weil QR || ST, auch QM = MR, ſo iſt

$$MR = PH = AP - AH = \frac{bs^2}{a^2} = QM, \text{ und } HD$$

$$= AH + BD + AB = 2\,AH + AB = \frac{(a^2 + 2b^2)s}{a^2}$$

auch iſt $\triangle QML \backsim QRC \backsim DHC \backsim DPL$, folglich QR : HD = RC : CH, alſo QR + HD : RC + CH = HD : CH d. i. in der Figur, wo QR = 2 MR = 2 PH und RC + CH = PM;

$$2\,PH + HD : PM = HD : CH$$

$$\frac{s(s+b)^2}{a^2} : \frac{bs(s+b)^2}{a^3} = \frac{s(a^2+2b^2)}{a^2} : CH;$$

$$\text{alſo } CH = \frac{bs(a^2+2b^2)}{a^3} = \frac{b}{a} \cdot \frac{(a^2+2b^2)s}{a^2}$$

$$= \frac{b.\ HD}{a} \text{ und } CD = \sqrt{CH^2 + HD^2}$$

$$= \frac{s^2(a^2+2b^2)}{a^3} = \frac{s.\ HD}{a} \quad \text{Auch iſt } HD : CD$$

= a : s und CH : HD = b : a ingleichen CD : CH = s : b. Nun iſt

$$HD : CD\,[a:s] = PH \left[\frac{bs^2}{a^2}\right] : CL = \frac{bs^3}{a^3}$$

$$\text{und } HD : CH\,[a:b] = QM \left[\frac{bs^2}{a^2}\right] : LM = \frac{b^2s^2}{a^3}$$

Alſo

alſo CL. LM $= \frac{b^3 s^5}{a^6} =$ dem beſtändigen Producte der Coordinaten auf der Aſymptote, $= CV^q$, der Potenz der Hyperbel, wenn CV = VE gemacht wird. Man ſetze alſo

$$CV = \frac{\sqrt{b^3 s^5}}{a^3} = \frac{bs^2 \sqrt{bs}}{a^3}$$, ſo wird VE, mit CH parallel gezogen = CV ſeyn. Man ziehe ferner das Perpendikel VN, ſo iſt CN = NE $= \frac{1}{4}\alpha$, und 1 : Coſ. k

$$= CV \frac{(bs^2 \sqrt{bs})}{a^3} : CN = \frac{bs^2 \sqrt{bs}}{a^3} . \text{Coſ.} k = \frac{\alpha}{4}$$

und $4 CN = \frac{4 bs^2}{a^3} \sqrt{bs}$. Coſ. k = α, der großen Axe. Eben ſo iſt CN : NV = CE (2 CN) : EF d. i.

$$\text{Coſ.} k : \text{Sin.} k = \frac{2 bs^2 \sqrt{bs}}{a^3} . \text{Coſ.} k : EF = \frac{2 bs^2 \sqrt{bs}}{a^3} .$$

$$\text{Sin.} k \text{ und } 2 EF = \frac{4 bs^2 \sqrt{bs}}{a^3} . \text{Sin.} k = \gamma,$$ der kleinen Axe; beydes für den Halbmeſſer 1; welches mit Alg. 416. VI. vollkommen übereinſtimmt.

Eben ſo wäre CH : HD [b : a] = 1 : tang. 2 k = 1 : Cot. HDC, wo ſowohl Tang. 2 k als Cot. HDC $= \frac{a}{b}$; wodurch man die Lage der zweyten Aſymptote QV beſtimmen kann, ohne den Punct M vorher zu ſuchen.

210.

210. Zuſ. 3. Die trigonometriſchen Linien aus den Axen wegzuſchaffen, muß man Sin. k; Coſ. k; wie vorher tang. 2 k; Cot. HDC in a und b auszudrücken ſuchen. Nun iſt CD: DH [s: a] = 1: Sin. 2 k = $\frac{a}{s}$, und CD: CH [s: b] = 1: Coſ. 2 k = $\frac{b}{s}$, und kann man aus dem Sinus oder Coſinus des doppelten Winkels, den Sin. oder Coſ. des einfachen Winkels leicht finden. Es iſt aber für den Halbmeſſer 1; (Trigon. 19. S. §. 8. 9.) Sin k = $\frac{\sqrt{1 - \text{Coſ. } 2k}}{2}$;

Coſ. k = $\frac{\sqrt{1 + \text{Coſ. } 2k}}{2}$ oder, den Werth von Coſ k gehörig ſubſtituirt, Sin. k = $\frac{\sqrt{s - b}}{2s}$;

Coſ. k = $\frac{\sqrt{s + b}}{2s}$. Dieſe Werthe in die obigen Ausdrücke von α, γ geſetzt, geben $\alpha = \frac{4bs^2\sqrt{bs(s+b)}}{a^3\sqrt{2s}}$

$= \frac{2bs^2\sqrt{2b(s+b)}}{a^3}$ und $\gamma = \frac{4bs^2\sqrt{bs(s-b)}}{a^3\sqrt{2s}}$

$= \frac{2bs^2\sqrt{2b(s-b)}}{a^3}$; alſo den Parameter $\beta = \frac{\gamma^2}{\alpha}$

=

$$= \frac{4b^2s^4 . 2b(s-b)}{a^6} : \frac{2bs^2\sqrt{2b(s+b)}}{a^3}$$

$$= \frac{4b^2s^2(s-b)}{a^3\sqrt{2b(s+b)}}$$; auch iſt hier $\frac{\alpha^2+\gamma^2}{16}$

$$= \frac{8b^3s^4}{16a^6}\overline{(s+b)+(s-b)} = \frac{b^3s^5}{a^6} = CL.\ LM$$

wie oben (209).

Die Gleichung der Hyperbel alſo, von welcher der Bogen AzD (Fig. 35.) d. i. der Bogen AEB (Fig. 36.) nur ein Stück iſt, iſt $z^2 = \frac{s-b}{s+b} . u^2 - \frac{2b^3s^4(s-b)}{a^6}$ die Abſciſſen u aus dem Mittelpuncte C, oder $z^2 = \frac{4b^2s^2(s-b)}{a^3\sqrt{2b(s+b)}} w + \frac{s-b}{s+b} w^2$, die Abſciſſen w vom Scheitelpuncte E an gerechnet.

211. Anm. Beym Frezier; Theorie et Pratique de la coupe des pierres &c. T. I. p. 124. kommt die in vorhergehender Aufgabe geforderte Verzeichnung des Bogens AzD unter dem Namen: Trait du Maitre Blancard vor. Die Abſicht nämlich iſt, einen gedruckten Bogen über ein Fenſter u. d. g. zu verzeichnen, deſſen Höhe gegen ſeine Breite geringe iſt. Der Zimmermeiſter Blancard bildete ſich ein, der Ort des Punctes z wäre ein Bogen eines Kreiſes, der durch A, D, B (Fig. 35.) gienge, deſſen Halbmeſſer alſo $\frac{1}{2}\left(CD + \frac{CB^2}{CD}\right)$ wäre; welches aber durch das, was hier gezeigt worden iſt, widerlegt wird. Auch kann, da der Punct B (Fig. 36.) nicht der Scheitelpunkt der Hyperbel iſt,

der Theil DZB (Fig. 35.) der hier in DCBF mit verzeichnet, und dem in ACDE verzeichneten gleich und ähnlich iſt, nicht die Fortſetzung des hyperboliſchen Bogens AEB (Fig. 36.) und alſo der Bogen AzDZB (Fig. 35) nicht ein Bogen einer einzigen zuſammenhängenden Linie ſeyn: ſondern man muß in dem Rechtecke CDFB wiederholen, was man in CDEA gemacht hat.

Zu der Abſicht des gedruckten Bogens könnte man noch ſuchen, was die krumme Linie, die des Punctes z geometriſcher Ort iſt, für Winkel mit CD, in D; mit CA in A; oder CB in B; macht. Das erſte würde entſcheiden, ob der Theil, der in DCBF verzeichnet wird, mit dem in CDEA verzeichneten zuſammenhängen kann, daß ſie eine Tangente EDF haben, oder ob da ein ſpitziger Winkel zwiſchen beyden entſteht: wenn das nicht ſchon aus dem vorhergehenden bekannt wäre; das zweyte iſt zu wiſſen nöthig, wenn man unterſuchen will, wie dieſer Bogen gegen die Widerlagen druckt.

212. Aufg. 49. **Den Winkel zu finden, den eine Linie aus der Sonne an einen Planeten gezogen (radius vector) mit des Planeten Richtung macht.**

Aufl. Die Planetenbahnen ſind Ellipſen, in deren einem Brennpuncte die Sonne liegt; der Weg eines Planeten aber, hat in jedem Puncte der Bahn die Richtung der Tangente an dieſen Punct. Alſo heißt die Aufgabe, geometriſch betrachtet: den veränderlichen Winkel SMT zu ſuchen, den die Linie SM in dem Puncte M mit der Tangente MT an dieſen Punct macht.

Man ziehe die Ordinate MP, ſo iſt alsdenn tang. $SMP = \frac{SP}{MP}$ und eben ſo tang. $PMT = \frac{PT}{MP}$; alſo (Trigon. 19. S. 3. Zuſ.) Tang. (SMP + PMT) d. i.

Tang.

$$\text{Tang. } SMT = \frac{SP + PT}{MP} : \left(1 - \frac{SP.\,PT}{MP^2}\right) =$$

$$\frac{ST.\,MP}{MP^2 - SP.\,PT}.$$ Drückt man nun dieſe Linien, aus dem erſten Capitel, in ihren Werthen aus, nach welchen

$$MP^2 = \frac{c^2}{4a^2}(a^2 - 4u^2);\ PT = \frac{a^2 - 4u^2}{4u};$$

$$SP = \frac{2u + \sqrt{a^2 - c^2}}{2};\ ST = \frac{a^2 + 2u\sqrt{a^2 - c^2}}{4u},$$

wo a die große Axe AB; c die kleine Axe ML; u die veränderliche Abſciſſe CP, bedeutet, ſo findet man

$$ST.\,MP = \frac{a^2 + 2u\sqrt{a^2 - c^2}}{4u} \cdot \frac{c}{2a}\sqrt{a^2 - 4u^2}$$

$= cQ\sqrt{a^2 - 4u^2}$, wenn man hier $\frac{a^2 + 2u\sqrt{a^2 - c^2}}{8au}$ $= Q$ ſetzt. Eben ſo iſt

$$MP^2 - SP.\,PT = \frac{c^2}{4a^2}(a^2 - 4u^2) -$$

$$\frac{(2u + \sqrt{a^2 - c^2})}{2} \cdot \frac{(a^2 - 4u^2)}{4u} = (a^2 - 4u^2).$$

$$\left(\frac{c^2}{4a^2} - \frac{2u + \sqrt{a^2 - c^2}}{8u}\right) = (a^2 - 4u^2)\ S,$$

wenn man den letzten Factor, oder

$$\frac{2c^2u - 2a^2u - a^2\sqrt{a^2 - c^2}}{8a^2u} = S \text{ ſetzt.}$$

Nun

Nun findet ſich $S = -Q \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$; und hieraus

$$MP^2 - SP.PT = -(a^2 - 4u^2)\frac{Q\sqrt{a^2 - c^2}}{a};$$

folglich $\frac{ST.MP}{MP^2 - SP.PT} = \frac{cQ\sqrt{a^2 - 4u^2}}{-(a^2 - 4u^2)Q\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}}$

oder Tang. $SMT = -\frac{ac}{\sqrt{a^2 - c^2}.\sqrt{a^2 - 4u^2}}$

für den Halbmeſſer 1. Nun iſt in der Ellipſe $\sqrt{a^2 - c^2}$ und $\sqrt{a^2 - 4u^2}$, ſo wie beyder Product, allemal poſitiv, u mag eine kleine oder große Abſciſſe bedeuten, und bleibt daher Tang. SMT durchgehends, für alle Puncte der Ellipſe, verneint, oder der gefundene Ausdruck giebt den Winkel SMT durchgehends ſtumpf; denn bey m, iſt dieſer Winkel Smt. Für den Nebenwinkel SMK, der den Winkel SMT zu 180° ergänzt, müßte man für die Tangente dieſes ſpitzigen Winkels, den vorhergefundenen Ausdruck poſitiv nehmen, alſo Tang. SMK = $\frac{ac}{\sqrt{a^2 - c^2}.\sqrt{a^2 - 4u^2}}$ ſetzen, und ſo kommt Tang. SMT = — Tang. SMK (Trig. 19. S. 4. Zuſ.); auch folgt hieraus Tang. (SMT + SMK) = 0, wie für die Tangente eines Bogens oder Winkels von 180° auch nothwendig kommen muß.

213. Anm. Hätte man aus dem zweyten Brennpuncte s die Linie sM gezogen, ſo wäre (8) sMT = SMK. Der Winkel sMT liegt aber in einem Triangel sMT, von wel-

chem man die drey Seiten sM, sT, MT, aus dem erſten Capitel ausdrücken kann: und ſo hätte man Sin. sMT d. i. Sin. SKM (Trig. 20. S.) aus dieſen Seiten berechnen können, wo der gefundene Ausdruck zugleich den Sinus von SMT, des ſtumpfen Nebenwinkels, beſtimmt haben würde; aber die Rechnung dafür iſt nicht kürzer als die vorige, für die Tangente des zuſammengeſetzten Winkels, durch welche man zugleich die Zweydeutigkeit des Sinus vermeidet, und den geſuchten Winkel gerade zu ſtumpf findet.

214. Zuſ. 1. Der hier gefundene veränderliche Ausdruck für Tang. SMT, giebt auch den Winkel SMT veränderlich. Will man nun unter allen SMT den größten Winkel ſuchen, ſo muß man u ſo beſtimmen, daß

$$\frac{ac}{\sqrt{a^2-c^2}.\sqrt{a^2-4u^2}}$$

oder Tang. SMK ein Kleinſtes wird (denn ſo wird der Winkel SMK ein kleinſter, folglich ſein ſtumpfer Nebenwinkel SMT ein größter) welches geſchieht, wenn man CP oder $u = 0$ ſetzt, weil dadurch der Diviſor ein Größtes, folglich der Quotient

$$\frac{ac}{\sqrt{a^2-c^2}.\sqrt{a^2-0}} = \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}$$

ein Kleinſtes wird.

215. Zuſ. 2. Wäre die Planetenbahn ein Kreiß, ſo wäre in dem Ausdrucke für Tang. SMT, auch $a=c$, und $\sqrt{a^2-c^2}=0$, alſo Tang. SMT $= \frac{a^2}{0} = \infty$, für jeden Werth von u. Der Winkel SMT wäre hier alſo durchgehends ein Winkel von 90°, oder ein rechter Winkel, wie bereits aus den Elementen bekannt iſt. Man findet alſo durch Berechnung, wie viel aufs höchſte, (denn der Fehler vermindert ſich, je größer das u

in

in der Ellipſe angenommen wird, ſo daß er für $u = \frac{1}{2}a$ ganz verſchwindet) dieſer Winkel unrichtig angenommen wird, wenn man die Planetenbahn für einen Kreiß annehmen wollte. Dieſes geſchieht z. E. von Hrn. Euler, in der Unterſuchung von den Folgen aus der allmähligen Fortpflanzung des Lichtes Comm. Petrop. T. XI. p. 185. und a. a. O. Man muß alſo, wenn man eine ſolche Vorausſetzung brauchen will, berechnen und zeigen können, daß die Unrichtigkeit, die man mit ihr annimmt, in das was man aus ihr herleitet, keine beträchtliche Folge hat.

216. Zuſ. 3. Nähme man des Planeten Eccentricität CS oder $\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{2} = 0,02.\ \frac{1}{2}a$, oder SC = $\frac{2}{100}$. CA, ſo fände man $\sqrt{a^2 - c^2} = 0,02.\ a = \frac{1}{50}a$, und hieraus $c^2 = \frac{(50^2 - 1)a^2}{50^2}$, oder $c = \frac{a\sqrt{2499}}{50}$; alſo $\frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}} = \frac{a\sqrt{2499}}{50} : \frac{a}{50} = \sqrt{2499}$ für die Tangente des geſuchten kleinſten Winkels SMK, auf den Rechnungshalbmeſſer 1 bezogen; und ſo findet man, vermittelſt der Logarithmen (nach welchen log. $\sqrt{2499} = \frac{1}{2}$ log. 2499.) für den Halbmeſſer der logarithmiſchen Tafeln.

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{2}\text{ log. } 2499 = & 1,6988831 \\ \text{log. rad. tab.} = & 10,0000000 \\ \hline \text{Log. tab. Tang. SMK} = & 11,6988831 \end{array}$$

welche Zahl in der Reihe der Logarithmen für die Tangenten den Winkel 88° 51′ + giebt, und iſt folglich, bey dieſer Vorausſetzung, der gröſte ſtumpfe Winkel, oder

$SMT' = 180° - (88° + 51' + \ldots) = 91° 9' -$ und übertrifft den rechten Winkel, den der Kreiß geben würde, noch nicht um 1° 9′

217. Zuſ. 4. Eine ſolche Ellipſe wäre aber noch mehr eccentriſch als die Erdbahn, wenn man für ſie (Anf. d. ang. Math. §. 274.) die mittlere Entfernung, $\frac{1}{2}(AS+SB)$ oder $\frac{1}{2}(21626 + 22374)$ d. i. $AC = 22000$ Halbmeſſer der Erde, folglich $AC - AS = 22000 - 21626$ oder die Eccentricität $SC = 374 = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{2}$ ſetzet, woraus $\sqrt{a^2 - c^2} = 748$, alſo $c^2 = a^2 - (748)^2 = (44000)^2 - (748)^2$ oder $c = 43992$, beynahe, folgt. Hieraus findet man

$$\frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}} = \frac{43992}{748} = \frac{9 \cdot 4888}{748} \text{ und}$$

$$\begin{aligned} 10 + \text{Log. } 9 &= 10{,}9542425 \\ \text{Log. } 4888 &= 3{,}6891312 \\ \hline \text{alſo } 10 + \text{Log. } 43992 &= 14{,}6433737 \\ \text{und Log. } 748 &= 2{,}8739016 \quad \text{ſubtr.} \\ \hline \text{Log. tab. Tang. } SMK &= 11{,}7694721 \end{aligned}$$

zu welchem Logarithmen der Winkel von 89° 2′ — der nächſte in der Tafel iſt. Da nun (212) $\text{Tang. } SMT = -\text{Tang. } SMK = -\text{tang.}(89° 2' -)$ ſo iſt hier der geſuchte gröſſre ſtumpfe Winkel, oder $SMT' = 90° 58' +$ läßt ſich alſo zeigen, daß bey den Berechnungen von der allmähligen Fortpflanzung des Lichts, oder bey andern Unterſuchungen, auf welche dieſer Winkel einen Einfluß hat, verſtattet iſt, einen ſolchen Winkel für einen Winkel von 90° zu nehmen, ſo darf man auch die Erdbahn, in dem Falle, für einen Kreiß annehmen; wie Hr. Euler am angeführten und andern Orten gethan hat.

218. Anm. Bey ſehr eccentriſchen Bahnen, wie z. E. die Bahn des **Merkurs** iſt, gehet es nicht an, weil da der Fehler zu beträchtlich wird. Dieſes hat Hr. Euler ſelbſt wahrgenommen, ob er gleich anfänglich geglaubt hat, die Planetenbahnen ließen ſich zu bemeldeter Abſicht alle für Kreiſe annehmen, und hat daher dieſe Unterſuchung ſelbſt von neuen in den Mem. de l'Acad. de Pr. 1746. vorgenommen. Die hier beygefügten Erläuterungen zeigen übrigens den practiſchen aſtronomiſchen Nutzen dieſer Aufgabe, die zugleich eine Probe von der Wichtigkeit mathematiſcher Kenntniſſe in der Abſicht iſt, daß wir hier wiſſen **wie viel** wir fehlen, weil wir doch allemal gewiß fehlen.

Bemerkung über die erſten Parabeln von allen Geſchlechtern.

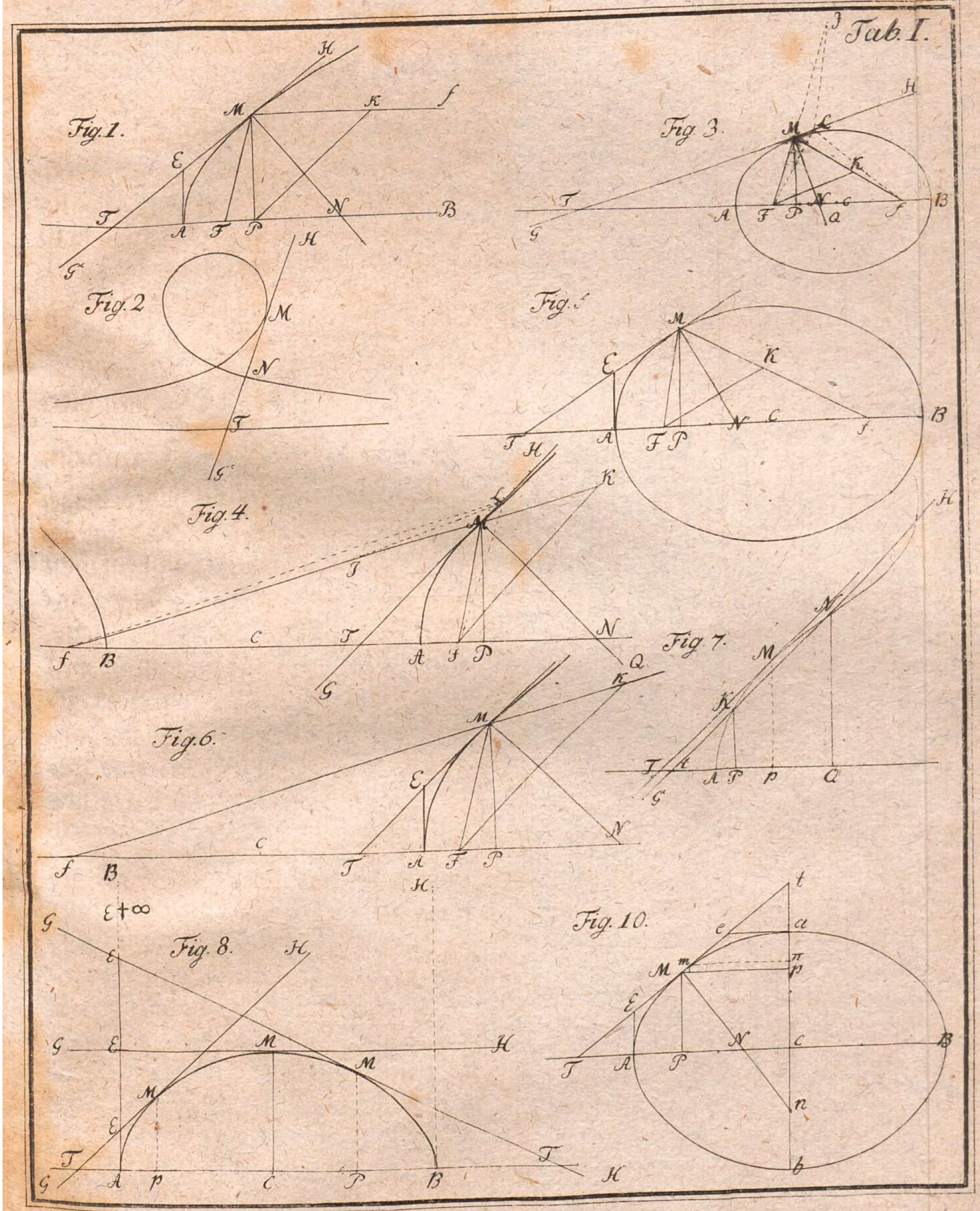
219. Wenn man die Pythagoriſche Tafel (Geom. 36) rechter Hand und unterwärts erweitert, fortſetzt: ſo iſt klar, daß alle poſitive ganze Potenzen, der von Eins an, in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlen, in die Quadratfächer der Tafel ſich nach und nach einſchreiben laſſen. Den untern, rechter Hand liegenden, Eckpunct eines ſolchen kleinen Quadrates, nenne man den **Winkelpunct** der eingeſchriebenen Zahl: ſo findet ſich, daß alle Winkelpuncte der Quadratzahlen, in einer geraden Linie; alle Winkelpuncte der Würffel, in einer Apolloniſchen Parabel; alle Winkelpuncte der Biquadrate, in der erſten cubiſchen; alle Winkelpuncte der fünften Potenzzahlen, in der erſten biquadratiſchen Parabel u. ſ. w. zu liegen kommen, dergeſtalt, daß jedesmal der Grad dieſer erſten Parabeln, die insgeſammt die Seite p eines ſolchen kleinen Quadrates zum gemeinſchaftlichen Parameter haben, um Eins kleiner ſeyn wird als der Potenzialexponent der Zahlen, durch deren Winkelpuncte dieſe Parabeln gehen; ſo daß die Parabeln $y^n = p^{n-1}x$, den $(n+1)$ten Potenzen der natürlichen Zahlen zugehören.

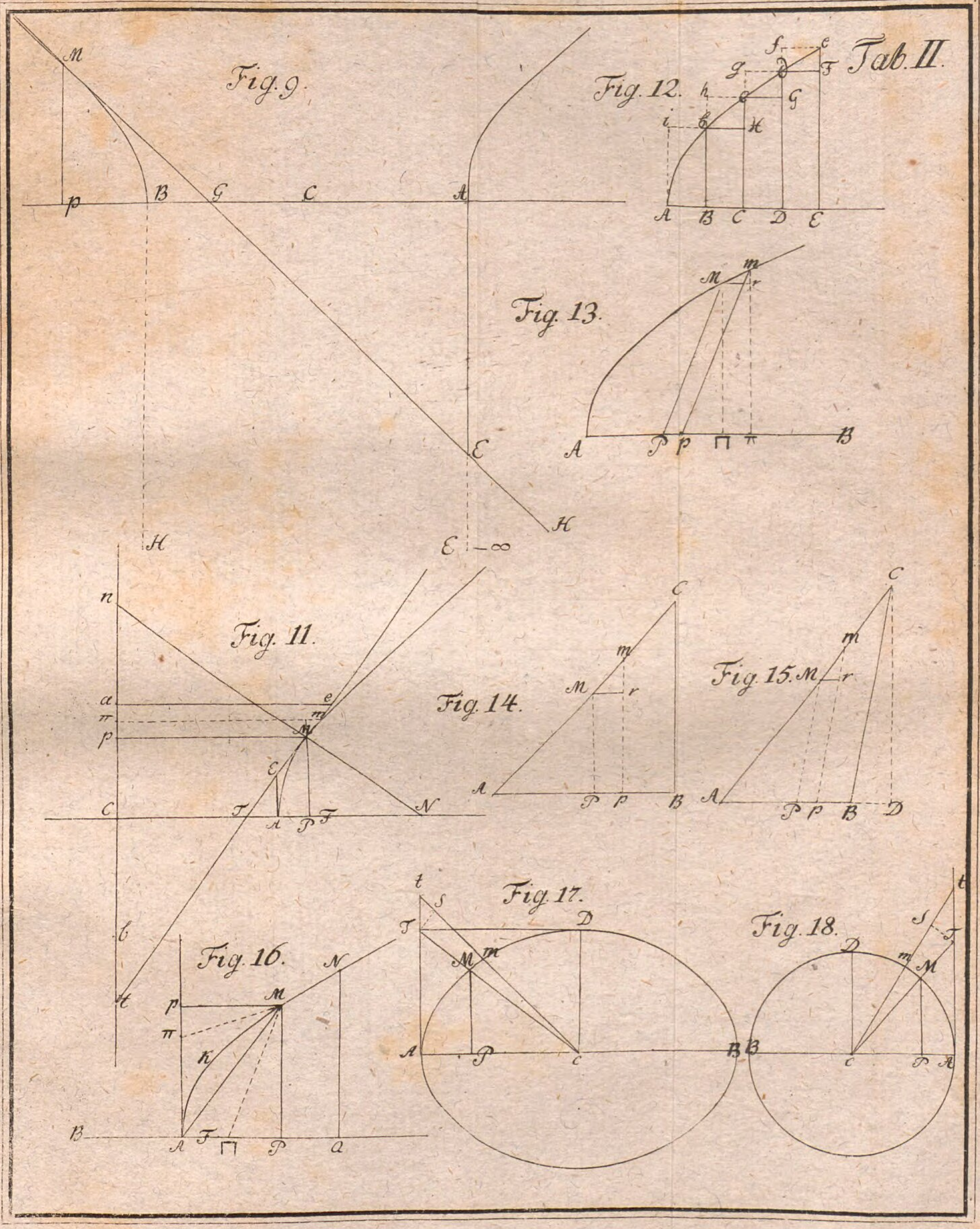
Bew.

Bew. Wenn (Fig. 38.) $AB = AC = p$; $AP = m.p$, daß bey P die natürliche Zahl m ſteht, ſo ſteht in der Querreihe PQ jedes m. z, wo z jede ganze Zahl bedeutet. Alſo ſey $PQ = p.m.z; = AP.z$; ſoll nun $mz = m^n$, ſeyn, ſo iſt $z = m^{n-1}$, alſo $PQ = AP.m^{n-1}$, oder, weil nach dem vorigen $m = \frac{AP}{p}$, alſo $m^{n-1} = \frac{AP^{n-1}}{p^{n-1}}$, ſo kommt $PQ = AP.\frac{AP^{n-1}}{p^{n-1}} = \frac{AP^n}{p^{n-1}}$, oder $p^{n-1}.PQ = AP^n$, und hieraus die Gleichung $y^n = p^{n-1}x$, für alle erſte Parabeln.

220. Zuſ. Die Bogen dieſer Parabeln haben insgeſammt ihren gemeinſchaftlichen Scheitel in A, und ſind gegen die Abſciſſenaxe AP hohl oder erhaben, nachdem man auf ihr x oder y zur Abſciſſe der Gleichung $y^n = p^{n-1}x$ annimmt; ſo daß ſich hier immer zwo, gleiche und ähnliche, Parabeln, über AP in die Tafel einſchreiben laſſen, weil hier jede Potenzzahl über 1, von den Würffeln an gerechnet, in der Tafel zweymal in ähnlicher Lage vorhanden iſt. Für $n = 1$ wird $y = x$, die Parabel eine gerade Linie, für die in gerader Linie hintereinander liegende Quadratzahlen.

221. Anm. Dieſe Bemerkung über die Potenzzahlen, deren Wahrheit ich aus der Betrachtung der Pythagoriſchen Tafel durch eine Induction erkannt hatte, überſchrieb ich bey Gelegenheit dem Hrn. Hofr. Käſtner, welcher ſie auch einer Bekanntmachung nicht unwerth hielt, und mir den hier beygefügten allgemeinen Beweiß dafür gütigſt mittheilte. Es erhellet übrigens von ſelbſt, daß man, ſo wie hier mit den Potenzzahlen in der Pythagoriſchen Tafel geſchehen iſt, auch andere Zahlen, die nach einem mit Abſicht gewählten Geſetze fortgehen, in Quadrate, Rechtecke, Triangel u. ſ. w. einſchreiben, und die Linien aufſuchen könnte, die die Winkel- oder andere Puncte gewiſſer Zahlen unter den eingeſchriebenen, ſchneiden würden; welche Unterſuchung in verſchiedenen Fällen nicht ohne Nutzen ſeyn dürfte.


Tab. I.
Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 10.


Tab. II
Fig. 9.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.

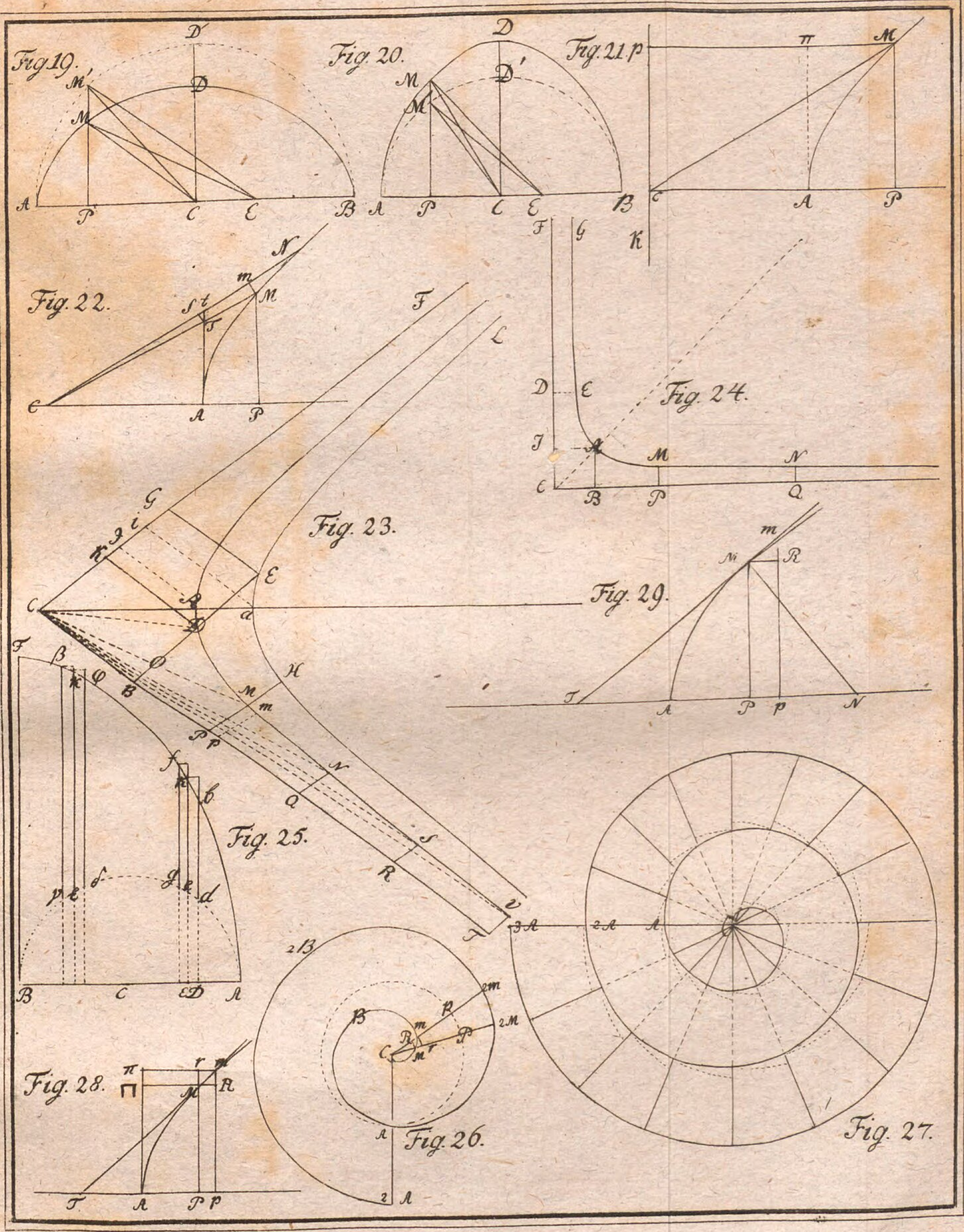
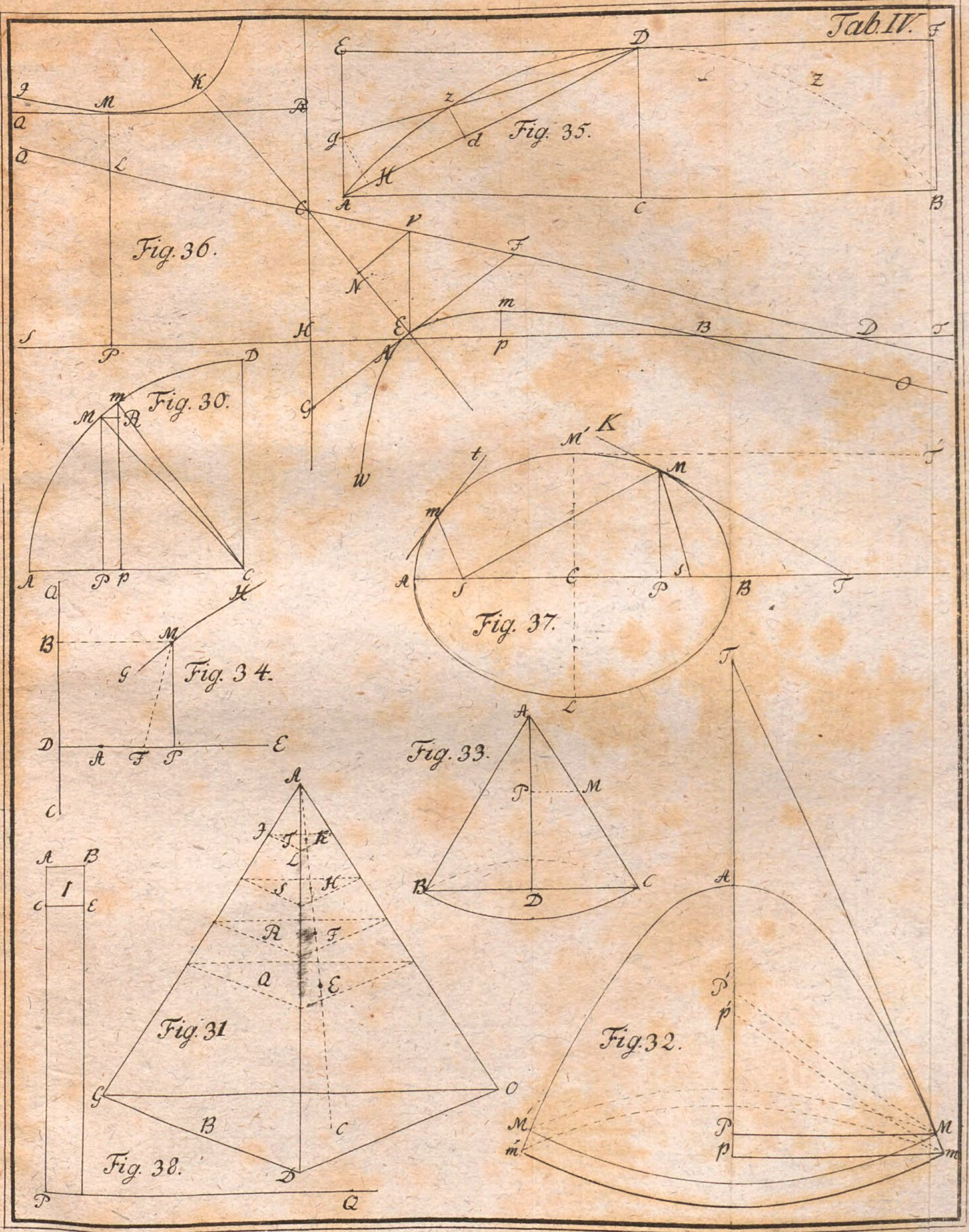


Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.


Tab. IV.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 30.
Fig. 37.
Fig. 34.
Fig. 33.
Fig. 31
Fig. 32.
Fig. 38.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schönberg, Kurt Friedrich <<von>>,

Abhandlung von den Tangenten, Quadraturen und Rectificationen der Kegelschnitte nebst einigen andern, diese Linien betreffenden Aufgaben

Leipzig 1773

Math.p. 2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081358-8
VD18 10531300